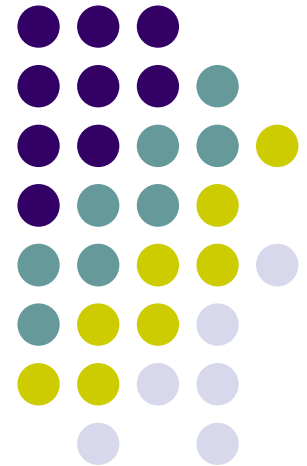


# Logika Matematika

## Bab 2: Kalkulus Proposisi

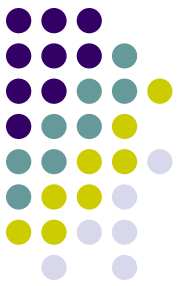
By,  
Andrian Rakhmatsyah  
Teknik Informatika STT Telkom





# Referensi

- Zohar Manna. *The Logical Basis For Computer Programming*. Addison Wesley Publishing. 1985
- Rosen, Kenneth H., *Discrete Mathematic and Its Applications*, 4<sup>th</sup> edition, McGraw Hill International Editions, 1999
- Soekadijo, R.G., *Logika Dasar tradisional, simbolik dan induktif*, Penerbit Gramedia Pustaka Utama, Jakarta, 1999.

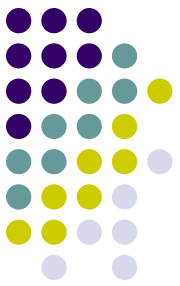


# Kalkulus Proposisi-Pendahuluan

- kalkulus proposisi merupakan metoda untuk menghitung dengan menggunakan proposisi/kalimat.
- yang ditinjau adalah nilai kalimat deklaratif (*true/false*)

Jadi, yang akan dipelajari adalah bagaimana menentukan nilai kebenaran suatu kalimat (*True/False*)

# Kalkulus Proposisi-Pendahuluan



Berdasarkan nilai kebenaran yang dimiliki suatu kalimat maka dapat ditentukan :

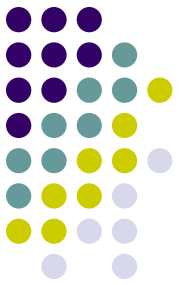
- Sifat yang dimiliki dari sebuah kalimat
- Apakah 2 buah kalimat merupakan kalimat yang ekuivalen satu sama lain

Kalimat dalam Kalkulus Proposisi dinotasikan sebagai Kalimat Abstrak. Contoh,

*Ada monyet di planet Jupiter*

Atau

*Tidak ada monyet di planet Jupiter*



# Kalkulus Proposisi-Pendahuluan

Tanpa harus mengetahui, apakah ada kehidupan di planet jupiter, maka kalimat tersebut dapat disimbolkan dengan kalimat abstrak.

$$P \text{ or not } (P)$$

Nilai kebenaran dari  $P \text{ or not } (P)$  adalah

- Jika  $P \leftarrow \text{TRUE}$ , maka  $\text{TRUE or not } (\text{TRUE}) = \text{TRUE}$
- Jika  $P \leftarrow \text{FALSE}$ , maka  $\text{FALSE or not } (\text{FALSE}) = \text{TRUE}$

Kalimat tersebut selalu bernilai TRUE untuk setiap kemungkinan nilai P, maka kalimat tersebut Bersifat VALID

# Kalkulus Proposisi-Pendahuluan



Contoh, diberikan pernyataan sebagai berikut.

1. Jika hari hujan, maka jalanan basah
2. Jika jalanan tidak basah maka hari tidak hujan

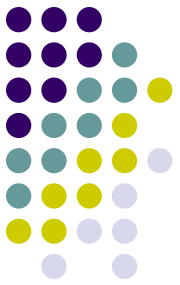
Jika dianalisis nilai kebenaran yang dimiliki kedua kalimat di atas dengan mengubahnya menjadi kalimat abstrak, maka kedua kalimat tersebut adalah ekuivalen.

1. if  $P$  then  $Q$
2. if (not  $Q$ ) then (not  $P$ )

# Kalkulus Proposisi-Pendahuluan



- a. Jawablah pertanyaan ini !
- b. Jam Berapakah ini ?
- c. Semarang adalah ibukota Propinsi Jawa Tengah
- d. Bandung adalah ibukota Propinsi Jawa Timur
- e. Tidak ada musim hujan di Indonesia
- f. Gunung Merapi terletak di 2 propinsi dan 3 kabupaten
- g. Badu kaya raya dan memiliki banyak harta



# Kalkulus Proposisi-Definisi

## Definisi Proposisi,

Kalimat pada Kalkulus Proposisi terbentuk dari simbol-simbol

- Simbol kebenaran ; True dan False
- Simbol kalimat ; E, F, G, H atau A, B, C,
- Simbol Variabel ;  $p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \dots$

## Definisi Kalimat,

Kalimat pada Kalkulus Proposisi dibentuk dg menggunakan penghubung logik,

1. NOT,
2. AND,
3. OR,
4. IF-THEN,
5. IF-AND-ONLY-IF,
6. IF-THEN-ELSE

Operasi pada kalimat proposisi didasarkan pada urutan prioritas penghubung logiknya.





# Kalkulus Proposisi-Definisi

Contoh, jika diberikan kalimat

**A : if not p and q then not r**

Maka penyelesaian operasi kalimat A adalah

**if ((not p) and q) then (not r)**

bukan

**if not (p and q) then (not r)**

# Kalkulus Proposisi-Definisi



Kalimat dibentuk menurut aturan-aturan berikut ini :

1. setiap proposisi adalah kalimat,
2. jika  $F$  adalah kalimat, maka negasi ( $\text{not } F$ ) adalah kalimat,
3. jika  $F$  dan  $G$  adalah kalimat, maka konjungsi ( $F \text{ and } G$ ) adalah kalimat,
4. jika  $F$  dan  $G$  adalah kalimat, maka disjungsi ( $F \text{ or } G$ ) adalah kalimat,
5. jika  $F$  dan  $G$  adalah kalimat, maka implikasi ( $\text{If } F \text{ then } G$ ) adalah kalimat.  $F$  disebut sebagai antisenden dan  $G$  sebagai konsekuen,
6. jika  $F$  dan  $G$  adalah kalimat, maka ekivalensi ( $F \text{ if and only if } G$ ) adalah kalimat.  $F$  disebut sebagai *left-hand-side* dan  $G$  sebagai *right-hand-side* dari ekivalensi,
7. jika  $F$ ,  $G$ , dan  $H$  adalah kalimat, maka kondisional  $\text{if } F \text{ then } G \text{ else } H$  adalah kalimat.  $F$  disebut sebagai *-if-clausa*,  $G$  sebagai *then-clausa*, dan  $H$  adalah sebagai *-else-clausa*

# Kalkulus Proposisi-Definisi



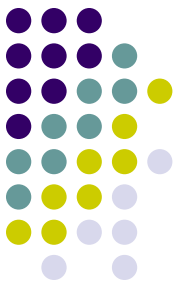
Kalimat-kalimat yang digunakan untuk membangun kalimat lain yang lebih kompleks, menggunakan salah satu aturan di atas dinamakan **subkalimat** dari kalimat tsb.

**Subkalimat** dari kalimat  $A$  adalah

Setiap kalimat antara, yang dipakai untuk membangun kalimat  $A$  termasuk kalimat  $A$  itu sendiri.

**Subkalimat murni** (*proper subsentence*) dari kalimat  $A$  adalah

Setiap kalimat antara, yang dipakai untuk membangun kalimat  $A$  tetapi tidak termasuk kalimat  $A$  itu sendiri.



# Kalkulus Proposisi-Definisi

Contoh, diketahui ekspresi

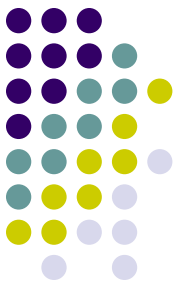
$E : ((\text{not } (p \text{ or } q) \text{ if and only if } ((\text{not } p) \text{ and } (\text{not } q))))$

- a. Apakah E merupakan kalimat ?
- b. Cari subkalimat dari E ?

Jawab,

- a. E adalah kalimat karena, p adalah kalimat dan q adalah kalimat, (p or q), (not p) dan (not q) adalah kalimat (not (p or q), ((not p) and (not q)) adalah kalimat ((not (p or q)) if and only if ((not p) and (not q))) adalah kalimat
- b. E memiliki 8 subkalimat, yaitu p, q, (p or q), (not p), (not q), not (p or q), (not p) and (not q), ((not (p or q)) if and only if ((not p) and (not q)))

Sebuah kalimat proposisi memiliki arti atau nilai kebenaran (true/false) tergantung dari interpretasi yang diberikan untuk kalimat tsb.



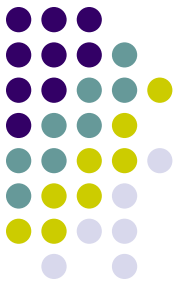
# Kalkulus Proposisi-Arti

Suatu kalimat  $P$  or  $(\text{not } Q)$  dapat diketahui kebenarannya, jika diketahui nilai kebenaran dari simbol proposisi  $p$  dan  $q$ .

## Definisi, Interpretasi

Interpretasi  $I$  untuk kalimat  $A$  adalah pemberian nilai kebenaran *true* atau *false*, untuk setiap kumpulan simbol kalimat  $A$  tsb.

Untuk sebarang kalimat  $A$ , interpretasi  $I$  disebut sebagai interpretasi untuk  $A$  jika  $I$  memberikan nilai kebenaran untuk setiap variabel proposisi yang muncul pada kalimat  $A$ .



# Kalkulus Proposisi-Arti

Contoh, diketahui kalimat

$$F : p \text{ or } (\text{not } q)$$

Ada beberapa macam interpretasi yang dapat diberikan untuk F

$$I_1 : p \leftarrow \textit{false}$$

$$q \leftarrow \textit{true}$$

$$I_2 : p \leftarrow \textit{false}$$

$$q \leftarrow \textit{false}$$

$$I_3 : p \leftarrow \textit{false}$$

$$I_4 : p \leftarrow \textit{false}$$

$$q \leftarrow \textit{true}$$

$$r \leftarrow \textit{false}$$

Dapat disimpulkan bahwa,  $I_3$  bukan interpretasi yang valid untuk F. Sedangkan  $I_1$ ,  $I_2$ , dan  $I_4$  adalah interpretasi untuk F, walaupun  $I_4$  memberikan nilai pada variabel yang tidak muncul pada F.

# Kalkulus Proposisi-Aturan Semantik



## Definisi

Jika  $E$  berupa kalimat dan  $I$  adalah interpretasi dari  $E$ , maka nilai kebenaran dari  $E$  (dan semua subkalimatnya) dengan interpretasi  $I$  ditentukan dengan melakukan pengulangan aturan-aturan semantik berikut ini :

- **Aturan Proposisi**

Nilai kebenaran dari setiap simbol proposisi  $p, q, r, \dots$  dalam  $E$  adalah sama dengan nilai kebenaran yang diberikan untuk  $I$

- **Aturan *TRUE***

Kalimat *true* adalah *true* untuk  $I$

- **Aturan *FALSE***

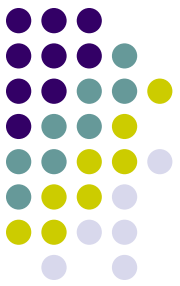
Kalimat *false* adalah *false* untuk  $I$

- **Aturan *NOT***

Negasi kalimat :  $\text{not } F$  adalah *true* jika  $F$  adalah *false* dan *false* jika  $F$  adalah *true*

- **Aturan *AND***

Konjungsi  $F$  *and*  $G$  adalah *true* jika  $F$  dan  $G$  keduanya benar, dan *false* jika sebaliknya (yaitu jika  $F$  *false* atau  $G$  *false*)



# Kalkulus Proposisi-Aturan Semantik

- **Aturan *or***

Disjungsi  $F$  *or*  $G$  adalah *true* jika  $F$  *true* atau jika  $G$  *true*, dan *false* jika keduanya *false*

- **Aturan *if-then***

Implikasi *if*  $F$  *then*  $G$  adalah *true* jika  $F$  *false* atau jika  $G$  *true* dan *false* jika  $F$  *true* dan  $G$  *false*

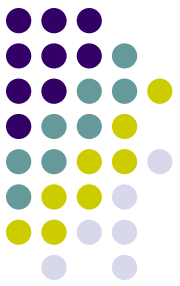
- **Aturan *if-and-only-if***

Ekivalensi  $F$  *if and only if*  $G$  adalah *true* jika nilai kebenaran  $F$  adalah sama dengan nilai kebenaran  $G$ , sebaliknya *false* jika memiliki nilai kebenaran keduanya berbeda.

- **Aturan *if-then-else***

Nilai kebenaran kondisional *if*  $F$  *then*  $G$  *else*  $H$  adalah nilai kebenaran  $G$  jika  $F$  *true* dan nilai kebenaran  $H$  jika  $F$  *false*.





# Kalkulus Proposisi-Aturan Semantik

Contoh, misalkan sebuah kalimat :

$A : \text{if } (x \text{ and } (\text{not } y)) \text{ then } ((\text{not } x) \text{ or } z)$

interpretasi I untuk A adalah

$I : x \rightarrow T$

$y \rightarrow F$

$z \rightarrow F$

Dengan menggunakan aturan semantik, maka kalimat A dapat ditentukan nilai kebenarannya,

karena  $y \rightarrow F$ , maka berdasarkan **aturan not**,  $(\text{not } y) \rightarrow T$

karena  $x \rightarrow T$  dan  $(\text{not } y) \rightarrow T$ , maka berdasarkan **aturan and**,  $(x \text{ and } (\text{not } y)) \rightarrow T$

karena  $x \rightarrow T$ , maka berdasarkan **aturan not**,  $(\text{not } x) \rightarrow F$

karena  $(\text{not } x) \rightarrow F$  dan  $z \rightarrow F$ , maka berdasarkan **aturan or**,  $((\text{not } x) \text{ or } z) \rightarrow F$

karena  $(x \text{ and } (\text{not } y)) \rightarrow T$  dan  $((\text{not } x) \text{ or } z) \rightarrow F$ , maka berdasarkan **aturan if-then**,  
 $\text{if } (x \text{ and } (\text{not } y)) \text{ then } ((\text{not } x) \text{ or } z) \rightarrow F$



# Kalkulus Proposisi-Sifat Kalimat

- **VALID (TAUTOLOGI)**  
Kalimat A valid jika bernilai true berdasarkan semua interpretasi untuk A
- **SATISFIABLE**  
Kalimat A satisfiable jika bernilai true berdasarkan beberapa interpretasi untuk A
- **CONTRADICTORY (UNSATISFIABLE)**  
Kalimat A contradictory jika bernilai False berdasarkan semua interpretasi untuk A
- **IMPLIES**  
Kalimat A implies kalimat B, jika untuk sebarang interpretasi I untuk A dan B, jika A bernilai true berdasarkan I maka B juga bernilai true berdasarkan I
- **EQUIVALENT**  
Kalimat A dan B ekuivalen jika, untuk setiap interpretasi A dan B, A mempunyai nilai kebenaran yang sama dengan B
- **CONSISTENT**  
Sekumpulan kalimat  $A_1, A_2, \dots$  konsisten jika ada interpretasi untuk  $A_1, A_2, \dots$  sehingga  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) bernilai true

# Kalkulus Proposisi-Aturan Semantik



Contoh,

- Kalimat  $w$  or  $(\text{not } w)$  adalah kalimat valid
- Kalimat  $x$  and  $(\text{not } x)$  adalah kalimat contadictory

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



## Examples of Statements

1. “Roses are red and violets are blue” is a compound statement with substatements “Roses are red” and “violets are blue” connected by an “and” relation.
2. “He is very smart or he studies very hard every night” is a compound statement with substatements “He is very smart” and “he studies very hard every night” connected by an “or” relation.
3. “Where are you going?” is not a statement, since it can not be assigned a true or false value.

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



Let  $p$  be “He is tall” and let  $q$  be “He is handsome.” Write each of the following in symbolic form using  $p$  and  $q$ :

1. He is tall and handsome.
2. He is tall but not handsome.
3. It is false that he is either short or handsome.

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



Bentuklah ke dalam kalimat abstrak

1. Sore hari ini mendung dan lebih dingin dari kemarin. Jika saya akan pergi berenang maka cuaca cerah. Jika saya tidak berenang maka saya akan pergi belanja. Jika saya pergi belanja maka saya akan berada dirumah tepat pada saat matahari terbenam.

Misalkan :

$p$   $\leftarrow$  Sore hari ini cuaca cerah

$q$   $\leftarrow$  Lebih dingin dari kemarin

$r$   $\leftarrow$  Saya akan pergi berenang

$s$   $\leftarrow$  Saya akan pergi belanja

$u$   $\leftarrow$  Saya akan berada dirumah tepat pada saat matahari terbenam.

Sore hari ini mendung dan lebih dingin dari kemarin : **not p and q**

Jika saya akan pergi berenang maka cuaca cerah : **if r then p**

Jika saya tidak berenang maka saya akan pergi belanja : **if not r then s**

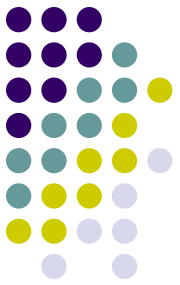
Jika saya pergi belanja maka saya akan berada dirumah tepat pada saat matahari terbenam :

**if s then u**

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



Seorang raja yang mutlak harus sungguh-sungguh dapat berlaku sebagai binatang, harus berbuat seperti si rubah dan si singa, sebab singa tidak dapat melindungi dirinya terhadap jerat, dan si rubah tidak dapat mempertahankan diri terhadap srigala.



# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak

P  $\leftarrow$  seorang raja ... sebagai binatang

Q  $\leftarrow$  si rubah

R  $\leftarrow$  si singa

S  $\leftarrow$  tidak dapat melindungi dirinya terhadap jerat

T  $\leftarrow$  tidak dapat mempertahankan diri terhadap srigala.

“Seorang raja yang mutlak harus sungguh-sungguh dapat berlaku sebagai binatang, harus berbuat seperti si rubah dan si singa...”

$\rightarrow$  **A : if p then q and r**

“...singa tidak dapat melindungi dirinya terhadap jerat..”

$\rightarrow$  **B : If r then s**

“...si rubah tidak dapat mempertahankan diri terhadap srigala.”

$\rightarrow$  **C : If q then t**

Sehingga : if B and C then A

$\rightarrow$  **If (If r then s) and (If q then t) then (if p then q and r)**



# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



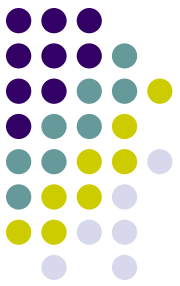
1. Jika kamu mengirim e-mail maka saya akan menyelesaikan program lebih awal. Jika kamu tidak mengirim e-mail maka saya akan tidur lebih awal. Jika saya tidur lebih awal maka saya akan merasa lebih segar.
2. Kalau rakyat rajin bekerja dan Pemerintah cakap, maka masyarakat tenang atau pembangunan berjalan lancar. Kalau rakyat tenang atau pembangunan berjalan lancar, maka negara sejahtera dan rakyat bahagia. Rakyat rajin bekerja.
3. Jika hari hujan dan angin kencang maka terjadilah banjir. Jika terjadi banjir, rakyat menderita. Anginnya kencang, akan tetapi rakyat tidak menderita.

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



4. Jika penawaran emas dibiarkan konstan dan permintaan emas bertambah maka harga emas naik. Jika permintaan emas bertambah yang menyebabkan harga emas naik, maka ada keuntungan bagi spekulator. Penawaran emas dibiarkan konstan.
5. Kalau rakyat berkuasa dan ada pemilihan umum, itu berarti bahwa ada sistem demokrasi. Kalau ada pemilihan umum dan ada sistem demokrasi, maka pemerintah dapat diganti oleh rakyat. Rakyat berkuasa.
6. Kalau rakyat berpegang pada UUD '45, maka rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya. Kalau rakyat menerima apa yang tercantum di dalam UUD '45, maka rakyat menerima Pancasila. Rakyat berpegang pada UUD '45 dan ada yang berpegang kepada ideologi lain.

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



7. Jika Dewi lulus Sarjan Informatika, maka orangtuanya akan senang dan dia akan segera mendapatkan pekerjaan, akan tetapi bila tidak cepat lulus maka usahanya akan sia-sia.
8. Jika saya tidak keliru, Dewi sudah diwisuda Sarjana Informatika dan pacarnya atau orangtuanya berada disampingnya.
9. Jika Dewi tinggal di Jakarta, dia akan bahagia. Jika dia bahagia, dan menyukai pekerjaannya maka dia akan memperoleh gaji yang baik dari pekerjaannya atau dia sedang jatuh cinta. Jika dia jatuh cinta maka dia akan lebih menyukai pekerjaannya. Dengan demikian, maka dia akan memperoleh gaji yang baik dari pekerjaannya.

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



10. Misalkan A, B dan C adalah variabel proposisi

A = Anda Sakit Flu

B = Anda Ujian

C = Anda Lulus

Ubahlah ekspresi berikut ini ke dalam Bahasa Indonesia

a. if A then not B

b. if B then not C

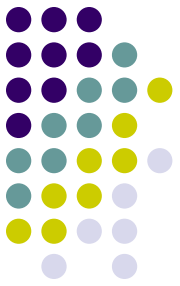
c. if not B then C

d. if A and B then C

e. (If A then not C) or (if B then not C)

f. (A and B) or (not B and C)

# Kalkulus Proposisi-Kalimat Abstrak



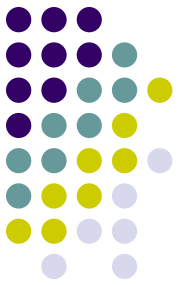
11. Kalau harga di Toko itu rendah, tentu banyak pembelinya. Toko itu dekat pemukiman penduduk atau tidak banyak pembelinya. Toko itu tidak dekat dengan pemukiman penduduk atau tidak banyak pembelinya. Toko itu tidak dekat dengan pemukiman penduduk.
12. Kalau rakyat berpegang pada UUD '45, maka rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya. Kalau rakyat menerima apa yang tercantum di dalam UUD '45, maka rakyat menerima Pancasila. Kalau dalam berpolitik ada yang berpegang kepada ideologi lain, maka negara Indonesia akan pecah. Rakyat berpegang pada UUD '45 atau ada yang berpegang kepada ideologi lain.

# Kalkulus Proposisi-Nilai Kebenaran



Penentuan nilai kebenaran suatu kalimat dapat dilakukan dengan 3 cara yaitu :

1. Tabel Kebenaran
2. Tabel Jarang (*sparse*)
3. Pohon Semantik

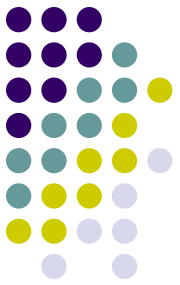


# Kalkulus Proposisi-Tabel Kebenaran

if (p and q) then (p or (not r))

Menggunakan Tabel Kebenaran

p	q	r	p and q	not r	p or not r	If (p and q) then (p or not r)
F	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	T	F	T	T



# Kalkulus Proposisi-Tabel Jarang

if (p and q) then (p or (not r))

Menggunakan Tabel Jarang (sparse table)

p	q	r	p and q	<u>If-</u> <u>then</u>	p or not r
T	-	-	-	T	T
F	-	-	F	T	-

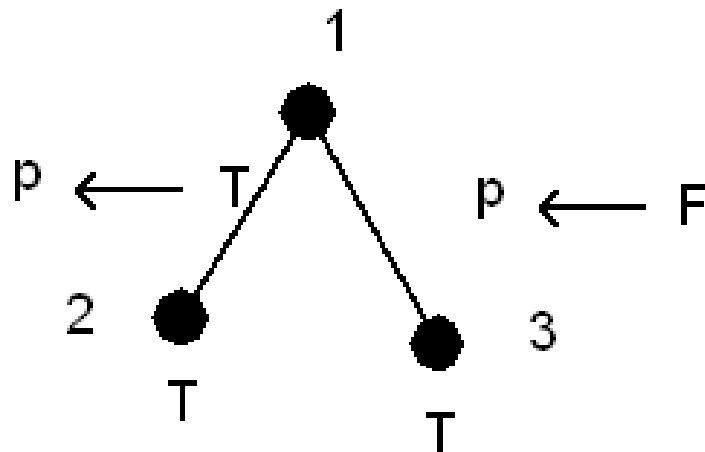


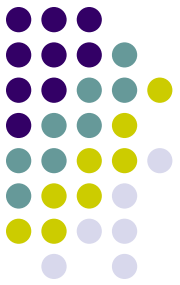


# Kalkulus Proposisi-Pohon Semantik

if (p and q) then (p or (not r))

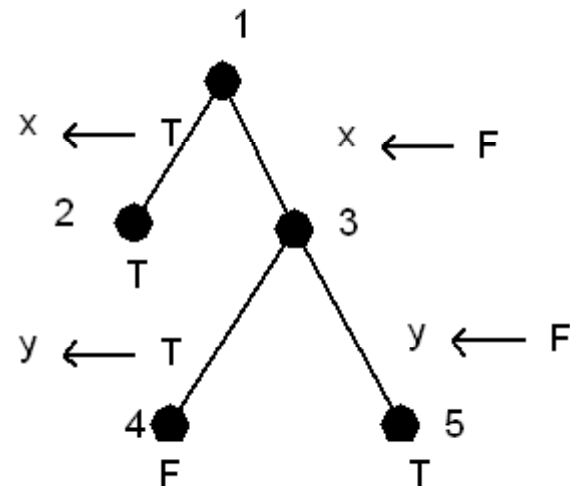
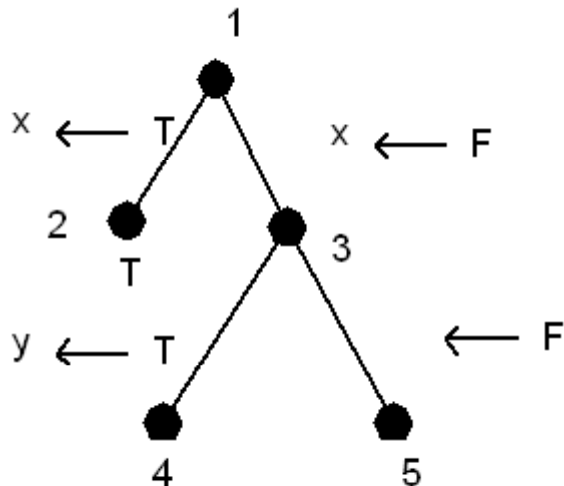
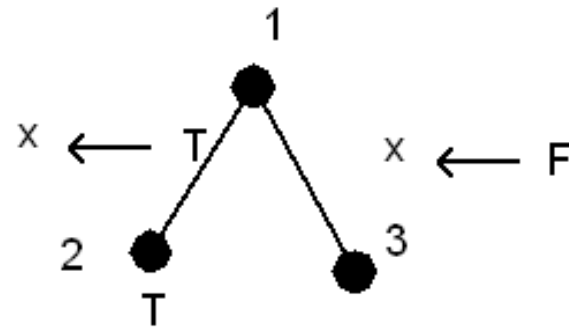
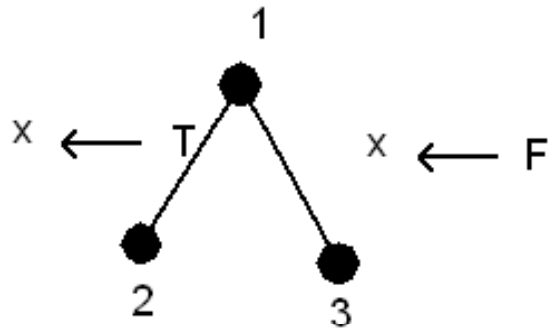
Menggunakan Pohon Semantik

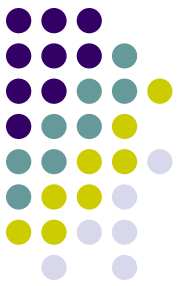




# Kalkulus Proposisi-Pohon Semantik

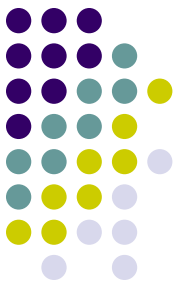
if (if x then y) then (if (not x) then (not y))





# Kalkulus Proposisi-Nilai Kebenaran

1. **A : not (not p and not q)**
2. **B : p and (p or q)**
3. **C : [not p and (not q and r)] or (q and r)  
or (p and r)**
4. **D : [ p and q ] or [ (if not p and q then p)  
or not q ]**
5. **E : [ if p then q ] if and only if [if not q  
then not p ]**



# Solusi no. 1

1.  $A : \text{not (not } p \text{ and not } q)$

p	q	not p	not q	not p and not q	not (not p and not q)
F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T

p	q	A
F	F	F
-	T	T
T	-	T

# Solusi no. 2



2. **B** :  $p$  and  $(p$  or  $q)$

$p$	$Q$	$p$ or $q$	$p$ and $(p$ or $q)$
F	F	F	F
F	T	T	F
T	F	T	T
T	T	T	T

$p$	$q$	$A$
F	-	F
T	-	T

# Solusi no. 3

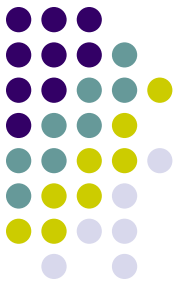


3.  $C : [\text{not } p \text{ and } (\text{not } q \text{ and } r)] \text{ or } (q \text{ and } r) \text{ or } (p \text{ and } r)$

p	q	r	not p	not q	(not q) and r	not p and (not q and r)	q and r	p and r	C
F	F	F	T	T	F	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	T	T	F	F	F	F	T	T	T

p	q	r	C
-	-	F	F
T	-	T	T
-	T	T	T
F	F	T	T

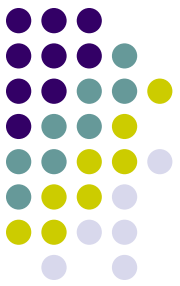
# Solusi no. 4



4.  $D : [ p \text{ and } q ] \text{ or } [ (\text{if not } p \text{ and } q \text{ then } p) \text{ or not } q ]$

p	q	p and q	not p and q	if not p and q then p	(if not p and q then p) or not q	D
F	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T

p	q	D
-	F	T
F	T	F
T	-	T



# Solusi no. 5

5.  $E : [ \text{if } p \text{ then } q ] \text{ if and only if } [ \text{if not } q \text{ then not } p ]$

$p$	$Q$	not $q$	not $p$	if $p$ then $q$	if not $q$ then not $p$	<b>E</b>
F	F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	T	F	F	T	T	T

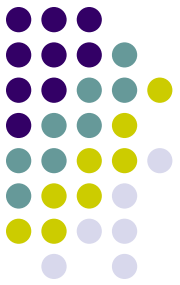
$p$	$Q$	<b>D</b>
F	-	T
-	T	T
T	F	T



# Kalkulus Proposisi-Falsification



- Digunakan untuk membuktikan validitas sebuah kalimat.
- Untuk membuktikan validitas sebuah kalimat diperlukan pembuktian nilai *true*, untuk semua interpretasi yang mungkin pada kalimat tersebut.
- Akan lebih mudah untuk membuktikan, jika ada 1 interpretasi yang mengakibatkan nilai kalimat tersebut *false* maka kalimat tersebut tidak valid.



# Kalkulus Proposisi-Falsification

**A : if ((not x) or (not y)) then (not (x and y))**

Dimisalkan A bernilai False berdasarkan suatu interpretasi, sehingga :

if ((not x) or (not y)) then (not (x and y))  $\leftarrow$  **False**

Dicobakan sehingga asumsi awal (false) dapat terbukti.

Antisenden : (not x) or (not y)  $\leftarrow$  **True**

Konsekuen : not (x and y)  $\leftarrow$  **False**

# Kalkulus Proposisi-Falsification



Antisenden :  $(\text{not } x) \text{ or } (\text{not } y) \leftarrow \text{True}$

Konsekuen :  $\text{not } (x \text{ and } y) \leftarrow \text{False}$

Dari antisenden belum dpt ditarik kesimpulan, shg dicari dari Konsekuen yaitu didapat

$\text{not } (x \text{ and } y) \leftarrow \text{False}$

$(x \text{ and } y) \leftarrow \text{True}$

I :  $x \leftarrow \text{True}$

$y \leftarrow \text{True}.$

Dari interpretasi yang didapat, maka Antisenden

$(\text{not } x) \text{ or } (\text{not } y) \leftarrow \text{True}$  (asumsi awal)

$\text{not } (\text{True}) \text{ or } \text{not } (\text{True}) \leftarrow \text{False}$  (dari I)

Terdapat Ketidaksesuaian antara asumsi awal dengan Interpretasi yang didapat, maka terjadi kontradiksi. Karena kontradiksi maka dapat diambil kesimpulan bahwa kalimat bersifat VALID

# Kalkulus Proposisi-Falsification



**B : (if x then y) if and only if ((not x) or y)**

Ada 2 kasus yang menjadikan kalimat B adalah *False*, yaitu

$I_1$  :

Sisi kiri : (if x then y)  $\leftarrow$  **True**

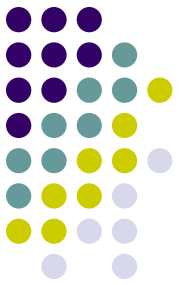
Sisi kanan : ((not x) or y)  $\leftarrow$  **False**

$I_2$  :

Sisi kiri : ((not x) or y)  $\leftarrow$  **True**

Sisi kanan : (if x then y)  $\leftarrow$  **False**

Maka harus diuji-cobakan untuk keseluruhan kasus.



# Kalkulus Proposisi-Falsification

Kasus  $I_1$  :

Sisi kiri : **if x then y**  $\leftarrow$  **True**

Sisi kanan : **not x or y**  $\leftarrow$  **False**

Dari sisi kanan dpt diambil kesimpulan :

**not x or y**  $\leftarrow$  **False**

$I_1$  : **y**  $\leftarrow$  **False**

**x**  $\leftarrow$  **True**

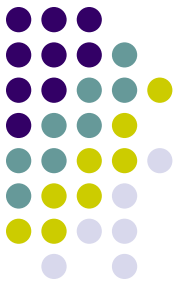
Sehingga sisi kiri,

**if x then y**  $\leftarrow$  **True** (asumsi awal)

Dari  $I_1$  , dapat disimpulkan bahwa

**If True then False**  $\leftarrow$  **False**

Sehingga terjadi KONTRADIKSI antara asumsi awal dengan  $I_1$



# Kalkulus Proposisi-Falsification

Kasus  $I_2$  :

Sisi kiri :  $((\text{not } x) \text{ or } y) \leftarrow \text{True}$

Sisi kanan :  $(\text{if } x \text{ then } y) \leftarrow \text{False}$

Dari sisi kiri dpt diambil kesimpulan :

$(\text{if } x \text{ then } y) \leftarrow \text{False}$

$I_2$ :  $y \leftarrow \text{False}$

$x \leftarrow \text{True}$

Sehingga sisi kanan,

$(\text{not } x) \text{ or } y \leftarrow \text{True}$  (asumsi awal)

Dari  $I_2$ , dapat disimpulkan bahwa

$(\text{not } \text{True}) \text{ or } \text{False} \leftarrow \text{False}$

Sehingga terjadi KONTRADIKSI antara asumsi awal dengan  $I_2$

# Kalkulus Proposisi-Falsification

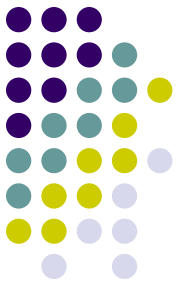


Kasus 1 : Terjadi KONTRADIKSI antara asumsi awal dengan  $I_1$

Kasus 2 : Terjadi KONTRADIKSI antara asumsi awal dengan  $I_2$

Sehingga disimpulkan bahwa kalimat B adalah **VALID**

# Kalkulus Proposisi-Falsification



1.  $(\text{if } x \text{ then } y \text{ or if } x \text{ then } z) \text{ iff } (\text{if } x \text{ then } y \text{ and } z)$
2.  $\text{if } (w \text{ and } x \text{ or not } z) \text{ then } (\text{not } w \text{ iff } z) \text{ and not } x$
3.  $\text{if } (\text{not } x \text{ and } y) \text{ and } (\text{if } x \text{ then } z) \text{ and } (\text{if } z \text{ then } w) \text{ and } (\text{if } w \text{ then } u) \text{ then } u$
4.  $\text{if } (\text{if } p \text{ then } q) \text{ and } (\text{if not } p \text{ then } r) \text{ and } (\text{if } r \text{ then } s) \text{ then } (\text{if not } q \text{ then } s)$
5.  $\text{if } (\text{if } p \text{ then } q) \text{ and } (\text{if } r \text{ then } s) \text{ and } (\text{if not } p \text{ then not } s) \text{ then } (\text{if } r \text{ then } q)$





# EKIVALENSI DAN KONSEKUENSI LOGIK

## Definisi Ekivalensi Logik

Dua buah kalimat A dan B merupakan ekivalensi logik jika dan hanya jika memiliki nilai yang sama pada semua interpretasi yang diberikan.

## Teorema

A Ekivalensi B, jika dan hanya jika ( $A \text{ iff } B$ ) merupakan Tautologi

## Definisi Konsekuensi Logik

B adalah konsekuensi logik dari A jika untuk setiap pemberian nilai kebenaran ke variabel pada A dan pada B sedemikian sehingga jika A mempunyai nilai TRUE maka B juga mempunyai nilai TRUE

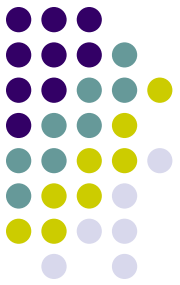
## Teorema

B Konsekuensi Logis dari A, jika dan hanya jika ( $\text{if } A \text{ then } B$ ) merupakan Tautologi

Catatan :

Jika pernyataan lebih dari 1, misal  $A_1, A_2, A_3$  maka bentuk konsekuensi logiknya :

$\text{IF } (A_1 \text{ AND } A_2 \text{ AND } A_3) \text{ THEN } B$



# EKIVALENSI DAN KONSEKUENSI LOGIK

Contoh Kasus :

Periksa apakah B merupakan kesimpulan dari 6 argumen dibawah ini ?

$A_1$  : if P then (Q and R and S)

$A_2$  : if T then (if U then (if not Y then not S))

$A_3$  : if Q then T

$A_4$  : if R then (if X then U)

$A_5$  : if Y then not X

$A_6$  : X

B : not P

---

Jawaban

Harus dibuktikan bahwa kalimat :

**IF ( $A_1$  and  $A_2$  and  $A_3$  and  $A_4$  and  $A_5$  and  $A_6$ ) THEN B** adalah VALID



## KONSEKUENSI LOGIK

$A_1$  : if p then (q and r and s)  $\leftarrow$  true

$A_2$  : if t then (if u then (if not y then not s))  $\leftarrow$  true

$A_3$  : if q then t  $\leftarrow$  true

$A_4$  : if r then (if x then u)  $\leftarrow$  true

$A_5$  : if y then not x  $\leftarrow$  true

$A_6$  : x  $\leftarrow$  true

B : not p  $\leftarrow$  false



# KONSEKUENSI LOGIK

$A_6$  :  $x \leftarrow \text{True}$   
 $B$  :  $\text{not } p \leftarrow \text{False}$  ;  $p \leftarrow \text{True}$   
 $A_5$  :  $\text{if } y \text{ then not } x \leftarrow \text{True}$   
 $\text{if } y \text{ then not } \text{True} \leftarrow \text{True}$  ;  $y \leftarrow \text{False}$   
 $A_1$  :  $\text{if } p \text{ then } (q \text{ and } r \text{ and } s) \leftarrow \text{True}$   
 $\text{if } \text{True} \text{ then } (q \text{ and } r \text{ and } s) \leftarrow \text{True}$   
 $(q \text{ and } r \text{ and } s) \leftarrow \text{True}$   
 $q \leftarrow \text{True}$  ;  $r \leftarrow \text{True}$  ;  $s \leftarrow \text{True}$   
 $A_3$  :  $\text{if } q \text{ then } t \leftarrow \text{True}$   
 $\text{if } \text{True} \text{ then } t \leftarrow \text{True}$  ;  $t \leftarrow \text{True}$   
 $A_4$  :  $\text{if } r \text{ then } (\text{if } x \text{ then } u) \leftarrow \text{True}$   
 $\text{if } \text{True} \text{ then } (\text{if } \text{True} \text{ then } u) \leftarrow \text{True}$   
 $(\text{if } \text{True} \text{ then } u) \rightarrow \text{True}$   
 $u \leftarrow \text{True}$

$A_2$  :  $\text{if } t \text{ then } (\text{if } u \text{ then } (\text{if not } y \text{ then not } s)) \leftarrow \text{True}$   
 $\text{if } \text{True} \text{ then}$   
 $(\text{if } \text{True} \text{ then } (\text{if not } \text{False} \text{ then not } \text{True})) \leftarrow$   
 $\text{True}$   
 $\text{if } \text{True} \text{ then } \text{False} \leftarrow \text{True}$   
 $\text{False} \neq \text{True} \rightarrow \text{Kontradiksi}$

Karena terjadi Kontradiksi maka Valid, Karena valid maka B adalah **Konsekuensi Logik** (Kesimpulan) dari  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,$  dan  $A_6$

# Kalkulus Proposisi-Konsekuensi Logik



Selidiki apakah kesimpulan yang diberikan merupakan konsekuensi logik dari pernyataan-pernyataan yang diberikan dengan menggunakan Metode Asumsi Salah !

1. Jika kamu mengirim e-mail maka saya akan menyelesaikan program lebih awal. Jika kamu tidak mengirim e-mail maka saya akan tidur lebih awal. Jika saya tidur lebih awal maka saya akan merasa lebih segar.

Jadi, Jika saya tidak menyelesaikan program lebih awal maka saya akan merasa lebih segar

2. Kalau rakyat rajin bekerja dan Pemerintah cakap, maka masyarakat tenang atau pembangunan berjalan lancar. Kalau rakyat tenang atau pembangunan berjalan lancar, maka negara sejahtera dan rakyat bahagia. Rakyat rajin bekerja.

Jadi, Negara sejahtera

# Kalkulus Proposisi-Konsekuensi Logik



3. Jika hari hujan dan angin kencang maka terjadilah banjir. Jika terjadi banjir, rakyat menderita. Anginnya kencang, akan tetapi rakyat tidak menderita.

Jadi, Hari tidak hujan

4. Jika penawaran emas dibiarkan konstan dan permintaan emas bertambah maka harga emas naik. Jika permintaan emas bertambah yang menyebabkan harga emas naik, maka ada keuntungan bagi spekulator. Penawaran emas dibiarkan konstan.

Jadi, Ada keuntungan bagi spekulator

# Kalkulus Proposisi-Konsekuensi Logik



5. Kalau rakyat berkuasa dan ada pemilihan umum, itu berarti bahwa ada sistem demokrasi. Kalau ada pemilihan umum dan ada sistem demokrasi, maka pemerintah dapat diganti oleh rakyat. Rakyat berkuasa.

Jadi, Pemerintah dapat diganti oleh rakyat

6. Kalau rakyat berpegang pada UUD '45, maka rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya. Kalau rakyat menerima apa yang tercantum di dalam UUD '45, maka rakyat menerima Pancasila. Rakyat berpegang pada UUD '45 dan ada yang berpegang kepada ideologi lain.

Jadi, Rakyat menerima Pancasila

# Kalkulus Proposisi-Konsekuensi Logik



7. Kalau harga di Toko itu rendah, tentu banyak pembelinya. Toko itu dekat pemukiman penduduk atau tidak banyak pembelinya. Toko itu tidak dekat dengan pemukiman penduduk atau tidak banyak pembelinya. Toko itu tidak dekat dengan pemukiman penduduk.

Jadi, harga Toko itu tidak rendah.

8. Kalau rakyat berpegang pada UUD '45, maka rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya. Kalau rakyat menerima apa yang tercantum di dalam UUD '45, maka rakyat menerima Pancasila. Kalau dalam berpolitik ada yang berpegang kepada ideologi lain, maka negara Indonesia akan pecah. Rakyat berpegang pada UUD '45 atau ada yang berpegang kepada ideologi lain.

Jadi, Rakyat menerima Pancasila atau negara Indonesia akan pecah



# Asumsi



## Asumsi 1

$p \leftarrow$  kamu mengirim email

$q \leftarrow$  saya akan menyelesaikan program lebih awal

$r \leftarrow$  saya akan tidur lebih awal

$s \leftarrow$  saya merasa lebih segar

## Asumsi 2

$p \leftarrow$  rakyat rajin bekerja,

$q \leftarrow$  pemerintah cakap

$r \leftarrow$  rakyat tenang

$s \leftarrow$  pembangunan berjalan lancar

$t \leftarrow$  negara sejahtera

$u \leftarrow$  rakyat bahagia

# Asumsi



## Asumsi 3

- $p \leftarrow$  hari hujan,
- $q \leftarrow$  angin kencang
- $r \leftarrow$  terjadi banjir
- $s \leftarrow$  rakyat menderita.

## Asumsi 4

- $p \leftarrow$  penawaran emas dibiarkan konstan
- $q \leftarrow$  permintaan emas bertambah
- $r \leftarrow$  harga emas naik
- $s \leftarrow$  ada keuntungan bagi spekulator

# Asumsi



## Asumsi 5

$p \leftarrow$  rakyat berkuasa

$q \leftarrow$  ada pemilihan umum

$r \leftarrow$  ada sistem demokrasi

$s \leftarrow$  pemerintah dapat diganti oleh rakyat

## Asumsi 6

$p \leftarrow$  rakyat berpegang pada UUD '45,

$q \leftarrow$  rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya,

$r \leftarrow$  rakyat menerima Pancasila,

$t \leftarrow$  ada yang berpegang kepada ideologi lain

# Asumsi



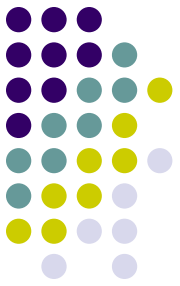
## Asumsi 7

- $p \leftarrow$  Harga di Toko itu rendah,
- $q \leftarrow$  banyak pembelinya,
- $r \leftarrow$  Toko itu dekat pemukiman penduduk

## Asumsi 8

- $p \leftarrow$  rakyat berpegang pada UUD '45,
- $q \leftarrow$  rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya,
- $r \leftarrow$  rakyat menerima Pancasila,
- $t \leftarrow$  ada yang berpegang kepada ideologi lain,
- $s \leftarrow$  negara Indonesia akan pecah

# KONJUNGSI DAN DISJUNGSI JAMAK



Misal diberikan kalimat yang mengandung operator konjungsi atau konjungsi lebih dari satu,

$A : p \text{ and } q \text{ and } r$

$B : p \text{ or } q \text{ or } r$

Maka urutan pengerjaan operasi pada kalimat tersebut dilakukan dari kiri ke kanan sesuai aturan sebagai berikut

## Konjungsi Jamak

$A_1 \text{ and } A_2 \text{ and } A_3 \text{ and } A_4 \text{ and } \dots \text{ and } A_n$

Memiliki arti :

$((\dots ((A_1 \text{ and } A_2) \text{ and } A_3) \text{ and } A_4) \text{ and } \dots ) \text{ and } A_n)$

## Disjungsi Jamak

$A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } A_3 \text{ or } A_4 \text{ or } \dots \text{ or } A_n$

Memiliki arti :

$((\dots ((A_1 \text{ or } A_2) \text{ or } A_3) \text{ or } A_4) \text{ or } \dots ) \text{ and } A_n)$

# KONJUNGSI DAN DISJUNGSI JAMAK



Kalimat-kalimat berikut adalah ekuivalen karena adanya hukum asosiasi :

A :  $((w \text{ and } x) \text{ and } y) \text{ and } z$

B :  $w \text{ and } (x \text{ and } (y \text{ and } z))$

C :  $w \text{ and } ((x \text{ and } y) \text{ and } z)$

# KONJUNGSI DAN DISJUNGSI JAMAK



Aturan semantik untuk hubungan jamak :

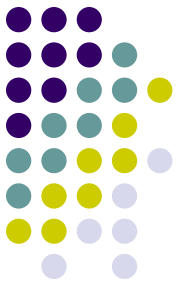
## Konjungsi jamak

$A_1$  and  $A_2$  and  $A_3$  and ... and  $A_n$  bernilai True jika tiap conjunct  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  adalah True

## Disjungsi Jamak

$A_1$  or  $A_2$  or  $A_3$  or ... or  $A_n$  bernilai True jika jika setidaknya salah satu dari  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  adalah True

# SUBSTITUSI



Substitusi adalah operasi pengantian subkalimat dari suatu kalimat dengan subkalimat yang lain.

## **Substitusi Total**

Penggantian seluruh kemunculan suatu subkalimat

## **Substitusi Parsial**

Penggantian nol, satu, atau lebih kemunculan suatu subkalimat



# SUBSTITUSI TOTAL



## Definisi Substitusi Total

Jika  $A$ ,  $B$ ,  $C$  adalah kalimat, maka

$$A \leftarrow \{B \leftarrow C\}$$

Adalah kalimat yang dihasilkan dengan mengganti seluruh kemunculan  $B$  di  $A$  dengan  $C$ .

# SUBSTITUSI TOTAL



Contoh :

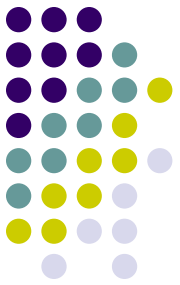
1.  $[ x \text{ and } (y \text{ or } x) ] \leftarrow \{ x \leftarrow (\text{if } w \text{ then } z) \}$   
menghasilkan :

$(\text{if } w \text{ then } z) \text{ and } (y \text{ or } (\text{if } w \text{ then } z))$

2.  $[ \text{if } x \text{ then } (y \text{ and } z) ] \leftarrow \{ (y \text{ and } z) \leftarrow w \}$   
menghasilkan :

$\text{if } x \text{ then } w$

# SUBSTITUSI TOTAL



Catatan :

1. Substitusi dikerjakan dalam 1 langkah

$[x \text{ and } y] \leftarrow \{ x \leftarrow (x \text{ and } z) \}$  menghasilkan  $(x \text{ and } z) \text{ and } y$

2. Substitusi tidak memiliki efek jika subkalimat yang akan diganti tidak muncul dalam kalimat,

$[x \text{ and } y] \leftarrow \{ z \leftarrow w \}$  menghasilkan menghasilkan  $x \text{ and } y$

3. Substitusi untuk konjungsi dan disjungsi jamak :

$[x \text{ and } y \text{ and } z] \leftarrow \{ (x \text{ and } y) \leftarrow w \}$

Sebenarnya  $[(x \text{ and } y) \text{ and } z] \leftarrow \{ (x \text{ and } y) \leftarrow w \}$  menghasilkan  $w \text{ and } z$

# SUBSTITUSI PARSIAL



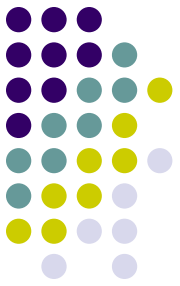
## Definisi Substitusi Parsial

Jika  $A, B, C$ , adalah kalimat maka

$$A \triangleleft \{B \leftarrow C\}$$

Akan menghasilkan salah satu kalimat dengan mengganti nol, sebagian, atau seluruh kemunculan subkalimat  $B$  di  $A$  dengan subkalimat  $C$

# SUBSTITUSI PARSIAL



## Definisi Substitusi Parsial

Jika  $A, B, C$ , adalah kalimat maka

$$A \triangleleft \{B \leftarrow C\}$$

Akan menghasilkan salah satu kalimat dengan mengganti nol, sebagian, atau seluruh kemunculan subkalimat  $B$  di  $A$  dengan subkalimat  $C$

# SUBSTITUSI PARSIAL

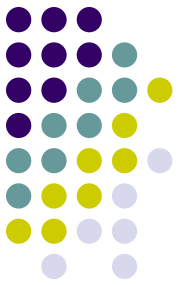


Contoh :

$$[ x \text{ or } x ] \triangleleft \{ x \leftarrow y \}$$

akan menghasilkan salah satu dari kalimat-kalimat berikut :

1.  $x \text{ or } x$       {mengganti nol kemunculan  $x$  }
2.  $y \text{ or } x$       {mengganti kemunculan  $x$  pertama}
3.  $x \text{ or } y$       {mengganti kemunculan  $x$  kedua}
4.  $y \text{ or } y$       {mengganti seluruh kemunculan dari  $x$ }



# SUBSTITUSI PARSIAL

Substitusi parsial bersifat *invertible*, yaitu salah satu kalimat yang mungkin dihasilkan adalah kalimat semula.

$$(A \triangleleft \{B \leftarrow C\}) \triangleleft \{C \leftarrow B\}$$

hasilnya adalah  $A$

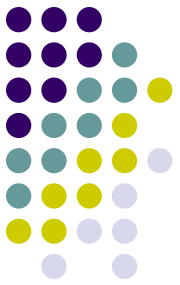
Contoh :

$$1. [(x \text{ or } y) \triangleleft \{x \leftarrow y\}] \triangleleft \{y \leftarrow x\}$$

salah satu kalimat yang mungkin adalah :  $x \text{ or } y$

$$2. [(x \text{ or } y) \blacktriangleleft \{x \leftarrow y\}] \blacktriangleleft \{y \leftarrow x\}$$

hasil yang diperoleh tepat 1 kalimat yaitu :  $x \text{ or } x$



# SUBSTITUSI JAMAK

Definisi : Misal  $A, B_1, B_2, \dots$ , dan  $C_1, C_2, \dots, C_n$  adalah kalimat dengan  $B_1, B_2, \dots, B_n$  saling berlainan.

## Substitusi Total

Substitusi total dituliskan sebagai :

$$A \leftarrow [ \begin{array}{l} B_1 \leftarrow C_1 \\ B_2 \leftarrow C_2 \\ \dots \\ B_n \leftarrow C_n \end{array} ]$$

Adalah kalimat yang diperoleh dengan menggantikan secara simultan (**serempak**) setiap kemunculan  $B_i$  di  $A$  dengan  $C_i$



# SUBSTITUSI JAMAK

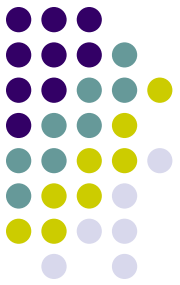


## Substitusi Partial

Substitusi partial dituliskan sebagai :

$$A \triangleleft [ \begin{array}{l} B_1 \leftarrow C_1 \\ B_2 \leftarrow C_2 \\ \dots \\ B_n \leftarrow C_n \end{array} ]$$

Adalah salah satu kalimat yang diperoleh dengan menggantikan nol, satu, atau lebih kemunculan  $B_i$  di  $A$  dengan  $C_i$



# SUBSTITUSI JAMAK

Contoh :

1. Substitusi jamak dilakukan serentak dalam 1 langkah

$$x \blacktriangleleft [ \begin{array}{l} x \leftarrow y \\ y \leftarrow x \end{array} ]$$

menghasilkan kalimat : y

Bedakan dengan substitusi bertahap sebagai berikut :

$$x \blacktriangleleft \{ x \leftarrow y \} \blacktriangleleft \{ y \leftarrow z \} \quad \text{menghasilkan kalimat : } z$$



# SUBSTITUSI JAMAK

2. [ if  $x$   
then if  $y$  or  $x$   
then  $y$  or  $z$  ]  $\leftarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow z \\ (y \text{ or } z) \leftarrow \text{not } z \end{array} \right\}$

menghasilkan :

[ if  $z$   
then if  $(y$  or  $z)$   
then  $\text{not } z$  ]



# SUBSTITUSI JAMAK

$$3. \quad \left[ \begin{array}{l} \text{if } x \\ \text{then if } (y \text{ or } x) \\ \text{then } (y \text{ or } z) \end{array} \right] \triangleleft \left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow z \\ (y \text{ or } z) \leftarrow \text{not } z \end{array} \right\}$$

menghasilkan salah satu dari 8 kalimat.

- a. if x then if y or x then y or z
- b. if **z** then if y or x then y or z
- c. if x then if y or **z** then y or z
- d. if **z** then if y or **z** then y or z
- e. if x then if y or x then **not z**
- f. if **z** then if y or x then **not z**
- g. if x then if y or **z** then **not z**
- h. if **z** then if y or **z** then **not z**

# PERLUASAN INTERPRETASI



## Definisi Interpretasi yang diperluas

Jika  $I$  adalah suatu interpretasi,  $x$  adalah simbol proposisi dan  $\tau$  adalah nilai kebenaran (*true/false*) maka perluasan interpretasi :

$$[x \leftarrow I] \circ I$$

adalah interpretasi yang memberikan nilai  $\tau$  pada  $x$  dan memberikan nilai kebenaran yang sesuai dengan interpretasi  $I$  untuk semua simbol proposisi selain  $x$ .

# PERLUASAN INTERPRETASI



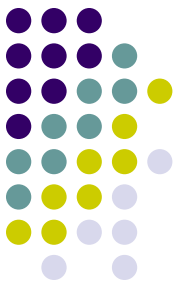
Contoh :

$$I_A : x \leftarrow T$$
$$y \leftarrow F$$

Jika  $I_B = [y \leftarrow T] \circ I_A$

maka menghasilkan perluasan interpretasi

$$I_B : x \leftarrow T$$
$$y \leftarrow T$$



# METODA DEDUKSI

- Salah satu metoda yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan berdasarkan pernyataan atau premis-premis yang diketahui.
- Metoda deduksi ini menggunakan aturan-aturan penalaran, ekivalensi logik dan tautologi
- Untuk mempermudah operasi penurunan digunakan operator-operator lama sbb:

Operasi	Simbol Baru	Simbol Lama
NEGASI	NOT	$\sim$
KONJUNGSI	AND	$\wedge$
DISJUNGSI	OR	$\vee$
IMPLIKASI	IF-THEN	$\supset$
EKIVALENSI	IF-AND-ONLY-IF	$\equiv$
KONDISIONAL	IF-THEN-ELSE	<b>Tidak Ada</b>

# METODA DEDUKSI



- Metoda Deduksi hanya dapat menunjukkan bahwa kesimpulan dari suatu penalaran valid; yaitu Jika kesimpulan yang diperoleh dapat dicapai/dibuktikan dengan aturan yang ada
- Jika tidak dapat menarik suatu kesimpulan dengan metoda deduksi, maka tidak berarti penalaran tersebut tidak valid. Ketidakvalidan suatu penalaran harus tetap dibuktikan secara eksplisit dengan Tabel Kebenaran atau Analisis Asumsi Salah (*Falsification*)



# ATURAN PENALARAN DASAR



## KONJUNGSI

Jika diketahui proposisi  $p$  dan  $q$  TRUE maka dapat disimpulkan bahwa penalaran berbentuk konjungsi  $(p \wedge q)$  juga akan bernilai TRUE

$$\frac{p}{q} \\ \hline p \wedge q$$

Atau dapat ditulis

$$(p \wedge q) \supset (p \wedge q)$$

# ATURAN PENALARAN DASAR



## SIMPLIFIKASI

Jika penalaran berbentuk konjungsi  $(p \wedge q)$  bernilai TRUE maka dapat disimpulkan bahwa proposisi unsur pembentuknya, yaitu  $p$  dan  $q$  TRUE

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad \text{dan} \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

Atau dapat ditulis

$$(p \wedge q) \supset p$$
$$(p \wedge q) \supset q$$

# ATURAN PENALARAN DASAR



## ADDITION DISJUNGS

Jika diketahui suatu proposisi  $p$  bernilai TRUE maka dapat disimpulkan bahwa proposisi disjungsi dengan proposisi lain juga bernilai TRUE

$$\frac{p}{p \vee q} \quad \text{atau} \quad \frac{q}{p \vee q}$$

# ATURAN PENALARAN DASAR

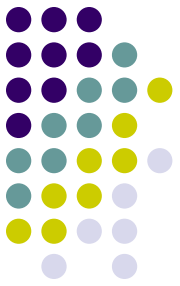


## SILOGISME DISJUNCTIVE

Jika diketahui disjungsi  $p \vee q$  bernilai TRUE dan salah satu proposisi pembentuknya FALSE maka dapat ditarik kesimpulan proposisi yang lain TRUE

$$\frac{p \vee q}{\sim p} \quad \text{dan} \quad \frac{p \vee q}{\sim q}$$
$$\frac{\quad}{q} \quad \quad \quad \frac{\quad}{p}$$

# ATURAN PENALARAN DASAR



## MODUS PONEN

Jika kondisional  $p \supset q$  TRUE; dimana antisendennya TRUE maka dapat disimpulkan bahwa konsekuen harus TRUE

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

# ATURAN PENALARAN DASAR



## MODUS TOLLENS

Jika kondisional  $p \supset q$  TRUE; dimana konsekuennya FALSE maka dapat disimpulkan bahwa antisenden harus FALSE

$$\begin{array}{r} p \supset q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

# ATURAN PENALARAN DASAR

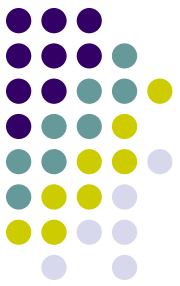


## SILOGISME HIPOTETIK

Jika diketahui 2 buah kondisional yang berkesinambungan maka dapat disimpulkan suatu kalimat kondisional yang baru

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ q \supset r \\ \hline p \supset r \end{array}$$

## TABEL ATURAN EKIVALENSI LOGIK



N O	ATURAN	BENTUK
<b>1.</b>	Negasi Ganda	$p \equiv \sim (\sim p)$
<b>2.</b>	Assosiatif	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
<b>3.</b>	<b>Komutatif</b>	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
<b>4.</b>	Identitas	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
<b>5.</b>	Distributif	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
<b>6.</b>	Hukum De Morgan	$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
<b>7.</b>	Hukum Penyerapan	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
<b>8.</b>	Implikasi	$p \supset q \equiv \sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$
<b>9.</b>	Kontrapositif	$p \supset q \equiv \sim q \supset \sim p$
<b>10.</b>	Eksportasi	$(p \wedge q) \supset r \equiv p \supset (q \supset r)$



# ATURAN PENALARAN DASAR



Note :

Metoda Deduksi mengandung kesulitan karena tidak ada suatu pegangan yang pasti untuk menurunkan kesimpulan, yaitu apakah harus menggunakan suatu aturan penalaran tertentu (misal : Simplifikasi, Modus Ponens, dll) atau menggunakan aturan ekivalensi atau aturan lainnya

# METODA DEDUKSI-CONTOH



Diketahui :

Jika ibu datang dari pasar, maka ani senang sekali

Ibu datang dari pasar dan membawa kue bolu

Jadi : Ani senang sekali

Apakah kesimpulan tersebut Valid?

Jawab :

Ubah penalaran tersebut menjadi kalimat proposisi

Premis:

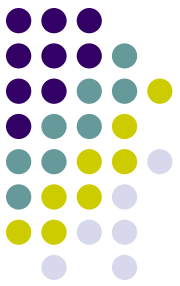
Jika ibu datang dari pasar, maka ani senang sekali :  $p \supset q$

Ibu datang dari pasar dan membawa kue bolu :  $p \wedge r$

Kesimpulan:

Ani senang sekali :  $q$

# METODA DEDUKSI-CONTOH



Telusuri dengan menggunakan tabel :

	Premis	Alasan	Keterangan
1.	$p \supset q$		
2.	$p \wedge r$		
3.	$p$	2, simplifikasi	Disimpulkan dari baris 2 dengan simplifikasi
4	$q$	1,3 Modus Ponens	Disimpulkan dari baris 1 dan 3 dengan Modus Ponens

# METODA DEDUKSI-CONTOH



Diketahui :

Ani masuk sekolah atau ani tidak masuk sekolah

Jika ani tidak masuk sekolah maka sekolah pasti libur

Sekolah Tidak Libur

Apa Kesimpulan dari penalaran tersebut ?

Jawab :

Gunakan metode deduksi !

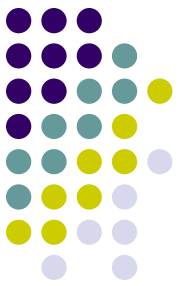
Premis:

Ani masuk sekolah atau ani tidak masuk sekolah :  $p \vee \sim p$

Jika ani tidak masuk sekolah maka sekolah pasti libur :  $\sim p \supset q$

Sekolah Tidak Libur :  $\sim q$

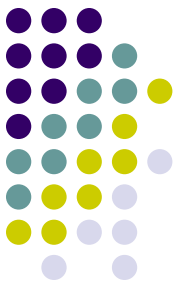
# METODA DEDUKSI-CONTOH



Telusuri dengan menggunakan tabel :

	Premis	Alasan	Keterangan
1.	$p \vee \sim p$		
2.	$\sim p \supset q$		
3.	$\sim q$		
4.	$\sim(\sim p)$	2, 3 Modus Tollens	Disimpulkan dari baris 2 dan 3 dengan modus ponens
5.	$p$	4, Negasi ganda	Kesimpulan

Jadi kesimpulannya adalah : Ani Masuk Sekolah.



# Contoh Kasus Deduksi

1. Tentukan kesimpulan dari Pernyataan berikut ini : Sore hari ini mendung dan lebih dingin dari kemarin. Jika Saya akan pergi berenang maka cuaca cerah. Jika saya tidak berenang maka saya akan pergi belanja. Jika saya pergi belanja maka saya akan berada dirumah tepat pada saat matahari terbenam.

**Jawab :**

Misalkan :

$p \leftarrow$  Sore hari ini cuaca cerah

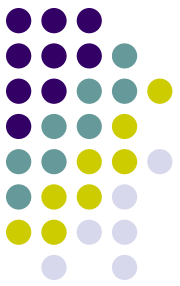
$q \leftarrow$  Lebih dingin dari kemarin

$r \leftarrow$  Saya akan pergi berenang

$s \leftarrow$  Saya akan pergi belanja

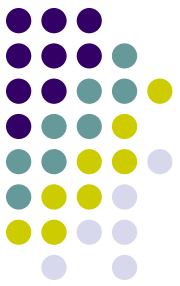
$u \leftarrow$  Saya akan berada dirumah tepat pada saat matahari terbenam.

# Solusi No. 1



1	$\sim p \wedge q$	
2	$r \supset p$	
3	$\sim r \supset s$	
4	$s \supset u$	
5	$\sim p$	1. Simplifikasi
6	$\sim r$	2, 5. Modus Tollens
7	$s$	3, 6 Modus Ponens
8	$u$	4, 7 Modus Ponens
	$\therefore u$	Kesimpulan

# Solusi No. 1



1	$\sim p \wedge q$	
2	$r \supset p$	
3	$\sim r \supset s$	
4	$s \supset u$	
5	$\sim r \supset u$	3, 4. Silogisme Hipotetik
6	$\sim p \supset \sim r$	2. Kontrapositif
7	$\sim p \supset u$	5, 6. Silogisme Hipotetik
8	$\sim p$	1. Simplifikasi
9	$u$	7, 8. Modus Ponens
	$\therefore u$	Kesimpulan





## No. 2

2. Jika kamu mengirim e-mail maka saya akan menyelesaikan program lebih awal. Jika kamu tidak mengirim e-mail maka saya akan tidur lebih awal. Jika saya tidur lebih awal maka saya akan merasa lebih segar.

**Jawab :** Misalkan :

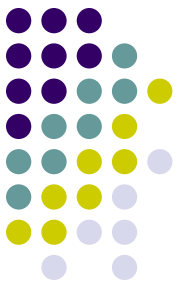
$p \leftarrow$  kamu mengirim email

$q \leftarrow$  saya akan menyelesaikan program lebih awal

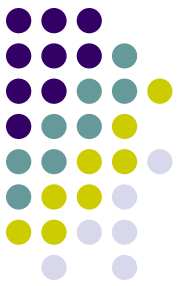
$r \leftarrow$  saya akan tidur lebih awal

$s \leftarrow$  saya merasa lebih segar

# Solusi No. 2



1	$p \supset q$	
2	$\sim p \supset r$	
3	$r \supset s$	
4	$\sim r \supset p$	2. Kontrapositif
5	$\sim r \supset q$	4, 1. Silogisme Hipotetik
6	$\sim s \supset \sim r$	3. Kontrapositif
7	$\sim s \supset q$	5, 6. Silogisme Hipotetik
8	$\sim q \supset s$	7. Kontrapositif
	$\therefore \sim q \supset s$	Kesimpulan



## No. 3

3. Jika hari hujan dan angin kencang maka terjadilah banjir. Jika terjadi banjir, rakyat menderita. Anginnya kencang, akan tetapi rakyat tidak menderita.

**Jawab :**

Misalkan

$p \leftarrow$  hari hujan,

$q \leftarrow$  angin kencang

$r \leftarrow$  terjadi banjir

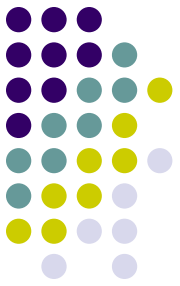
$s \leftarrow$  rakyat menderita.

# Solusi No. 3



1	$(p \wedge q) \supset r$	
2	$r \supset s$	
3	$q \wedge \sim s$	
4	$\sim s$	3. Simplifikasi
5	$\sim r$	2.4 Modus Tolens
6	$\sim (p \wedge q)$	1.5 Modus Tolens
7	$\sim p \vee \sim q$	6, Hukum De Morgan
8	$q$	3. Simplifikasi
9	$\sim p$	7.8 Silogisme disjungtif
	$\therefore \sim p$	Kesimpulan

# No. 4



4. Jika penawaran emas dibiarkan konstan dan permintaan emas bertambah maka harga emas naik. Jika permintaan emas bertambah yang menyebabkan harga emas naik, maka ada keuntungan bagi spekulator. Penawaran emas dibiarkan konstan.

**Jawab :**

Misalkan

$p \leftarrow$  penawaran emas dibiarkan konstan

$q \leftarrow$  permintaan emas bertambah

$r \leftarrow$  harga emas naik

$s \leftarrow$  ada keuntungan bagi spekulator

# No. 5



5. Kalau rakyat berkuasa dan ada pemilihan umum, itu berarti bahwa ada sistem demokrasi. Kalau ada pemilihan umum dan ada sistem demokrasi, maka pemerintah dapat diganti oleh rakyat. Rakyat berkuasa.

**Jawab :**

Misalkan

$p \leftarrow$  rakyat berkuasa

$q \leftarrow$  ada pemilihan umum

$r \leftarrow$  ada sistem demokrasi

$s \leftarrow$  pemerintah dapat diganti oleh rakyat

# No. 6



6. Kalau rakyat berpegang pada UUD '45, maka rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya. Kalau rakyat menerima apa yang tercantum di dalam UUD '45, maka rakyat menerima Pancasila. Rakyat berpegang pada UUD '45 dan ada yang berpegang kepada ideologi lain.

**Jawab :**

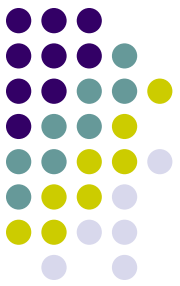
Misalkan

$p \leftarrow$  rakyat berpegang pada UUD '45,

$q \leftarrow$  rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya,

$r \leftarrow$  rakyat menerima Pancasila,

$t \leftarrow$  ada yang berpegang kepada ideologi lain,



## No. 7

7. Kalau harga di Toko itu rendah, tentu banyak pembelinya. Toko itu dekat pemukiman penduduk atau tidak banyak pembelinya. Toko itu tidak dekat dengan pemukiman penduduk atau tidak banyak pembelinya. Toko itu tidak dekat dengan pemukiman penduduk.

**Jawab :**

Misalkan

$p \leftarrow$  Harga di Toko itu rendah,

$q \leftarrow$  banyak pembelinya,

$r \leftarrow$  Toko itu dekat pemukiman penduduk



# No. 8



8. Kalau rakyat berpegang pada UUD '45, maka rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya. Kalau rakyat menerima apa yang tercantum di dalam UUD '45, maka rakyat menerima Pancasila. Kalau dalam berpolitik ada yang berpegang kepada ideologi lain, maka negara Indonesia akan pecah. Rakyat berpegang pada UUD '45 atau ada yang berpegang kepada ideologi lain.

**Jawab :**

Misalkan

$p$  = rakyat berpegang pada UUD '45,

$q$  = rakyat menerima apa yang tercantum didalamnya,

$r$  = rakyat menerima Pancasila,

$t$  = ada yang berpegang kepada ideologi lain,

$s$  = negara Indonesia akan pecah



## No. 9

9. Hanya kalau orang lulus ujian saringan, maka ia diterima di universitas. Kalau orang menjadi mahasiswa, ia wajib membayar uang SPP. Kalau orang tidak lulus ujian saringan, maka ia tidak wajib membayar uang SPP.

**Jawab :** Misalkan

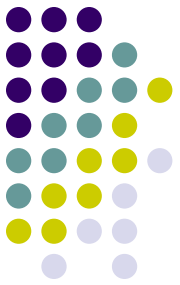
$p \leftarrow$  orang lulus ujian saringan

$q \leftarrow$  ia diterima di universitas

$r \leftarrow$  orang menjadi mahasiswa

$t \leftarrow$  wajib membayar uang SPP

# No. 10



10. Tentukan apakah „Sore hari ini cerah atau saya akan berada di rumah tepat pada saat matahari terbenam“ merupakan penalaran yang sah dari pernyataan-pernyataan berikut ini :

Saya tidak akan pergi berenang ataupun juga tidak pergi belanja, jika sore hari ini cuaca mendung. Jika saya tidak akan pergi berenang ataupun juga tidak pergi belanja maka cuaca hari ini tidak lebih dingin dari kemarin. Cuaca hari ini lebih dingin dari kemarin atau saya akan berada di rumah tepat pada saat matahari terbenam.

## Jawab

Misalkan

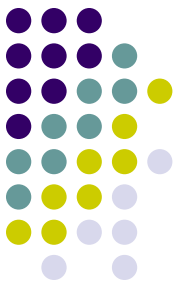
$p$  = sore hari ini cuaca mendung;

$q$  = Saya akan pergi berenang;

$r$  = Saya akan pergi belanja;

$s$  = Lebih dingin dari kemarin;

$t$  = Saya akan berada dirumah tepat pada saat matahari terbenam



# Solusi No. 4

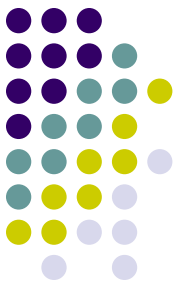
1	$(p \wedge q) \supset r$	
2	$(q \supset r) \supset s$	
3	$p$	
4	$p \supset (q \supset r)$	1. Eksportasi
5	$(q \supset r)$	4, 3. Modus Ponens
6	$s$	2, 5. Modus Ponens
7	$\therefore s$	Kesimpulan

1	$(p \wedge q) \supset r$	
2	$(q \supset r) \supset s$	
3	$p$	
4	$p \supset (q \supset r)$	1. Eksportasi
5	$p \supset s$	2, 4. Silogisme Hipotetik
6	$s$	5, 3. Modus Ponens
7	$\therefore s$	Kesimpulan



# Solusi No. 5

1	$p \wedge q \supset r$	
2	$q \wedge r \supset s$	
3	$p$	
4	$p \wedge q$	3, Addition
5	$r$	1,3 Modus Ponens
6	$q \wedge r$	5, Addition
8	$s$	2,6 Modus Ponens
9	$\therefore s$	Kesimpulan

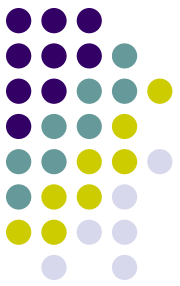


# Solusi No. 6

1	$p \supset q$	
2	$q \supset r$	
3	$p \wedge t$	
4	$p \supset r$	1, 2 Silogisme Hipotetik
5	$p$	3, Simplifikasi
6	$r$	4,5 Modus Ponens
7	$\therefore r$	Kesimpulan

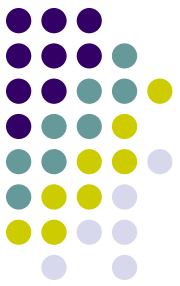
1	$p \supset q$	
2	$q \supset r$	
3	$p \wedge t$	
4	$p$	3, Simplifikasi
5	$q$	1, 4. Modus Ponens
6	$r$	2, 5. Modus Ponens
7	$\therefore r$	Kesimpulan

# Solusi No. 7



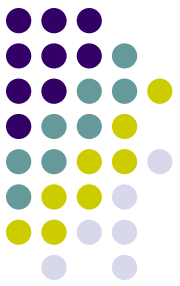
1	$p \supset q$	
2	$r \vee \sim q$	
3	$\sim r \vee \sim q$	
4	$\sim r$	
5	$\sim q$	2,4 Silogisme Disjungtive
6	$\sim p$	1,6 Modus Tollens
7	$\therefore \sim p$	Kesimpulan

# Solusi No. 8



1	$p \supset q$	
2	$q \supset r$	
3	$t \supset s$	
4	$p \vee t$	
5	$p \supset r$	1, 2 Silogisme Hipotetik
6	$\sim t \supset p$	4. Implikasi
7	$\sim t \supset r$	5, 6 Silogisme Hipotetik
8	$\sim s \supset \sim t$	3. Kontrapositif
9	$\sim s \supset r$	8, 7 Silogisme Hipotetik
10	$s \vee r$	9. Implikasi
8	$\therefore r \vee s$	Kesimpulan





# Solusi No. 9

1	$p \supset q$	
2	$r \supset t$	
3	$\sim p \supset \sim t$	
4	$t \supset p$	3, Kontrapositif
5	$r \supset p$	2,4 Silogisme Hipotetik
6	$r \supset q$	1,5 Silogisme Hipotetik
7	$\therefore r \supset q$	Kesimpulan

1	$p \supset q$	
2	$r \supset t$	
3	$\sim p \supset \sim t$	
4	$t \supset p$	3, Kontrapositif
5	$t \supset q$	1,4 Silogisme Hipotetik
6	$r \supset q$	2,5 Silogisme Hipotetik
7	$\therefore r \supset q$	Kesimpulan



# Solusi No. 10

1	$p \vee q \wedge r$	
2	$p \supset s$	
3	$s \supset r$	
4	$p \supset r$	2, 3 Silogisme Hipotetik
5	$\sim(\sim p) \vee (q \wedge r)$	1. Negasi Ganda
6	$\sim p \supset q \wedge r$	5. Ekuivalensi
7	$\sim r \supset \sim p$	4. Kontrapositif
8	$\sim r \supset q \wedge r$	6, 7 Silogisme Hipotetik
9	$\sim(q \wedge r) \supset r$	8. Kontrapositif
10	$r \vee (r \wedge q)$	9. Ekuivalensi
11	$r$	10. Penyerapan
	$\therefore r$	