Logika Matematika

Bab 4: Kalkulus Predikat

Andrian Rakhmatsyah
Teknik Informatika IT Telkom

Referensi

- Zohar Manna. *The Logical Basis For Computer Programming*. Addison Wesley Publishing. 1985
- Rosen, Kenneth H.,*Discrete Mathematic and Its Applications*, 4th edition, McGraw Hill International Editions, 1999
- Soekadijo, R.G., *Logika Dasar tradisional, simbolik dan induktif,* Penerbit Gramedia Pustaka Utama, Jakarta, 1999.
- Norvig, Russell, *Artificial Intelligent A Modern Approach*, Prentice-Hall , New Jersey, 1995.

Kalkulus Predikat-Pendahuluan

Kalimat pada kalkulus proposisi tidak dapat menjelaskan *konsep objek* dan *relasi antar objek*.

Contoh

Batuan di Mars berwarna putih

atau

Batuan di Mars tidak berwarna putih

Dengan aturan kalkulus proposisi, pernyataan tersebut dapat dibuat menjadi skema kalimat

(p or not p)

dan selanjutnya dapat ditentukan nilai kebenarannya

Kalkulus Predikat-Pendahuluan

Jika ada pernyataan lain,

Ada batuan di Mars berwarna putih

atau

Semua batuan di Mars berwarna putih

maka pernyataan di atas tidak dapat dibentuk menjadi skema kalimat kalkulus proposisi.

Hal ini disebabkan karena pernyataan tersebut mengandung **kuantisasi dari objek.**

Oleh karena itu dibutuhkan bahasa baru yang mengenal adanya konsep objek dan relasi antar objek, yaitu menggunakan **Kalkulus Predikat.**

Kalkulus Predikat-Pendahuluan

Dengan kalkulus predikat maka pernyataan tersebut diubah menjadi :

(for some x) (p(x) and q(x))

or

(for all x)(if p(x) then q(x))

dimana :

p(x) = x adalah batuan di Mars

q(x) = x adalah batuan berwarna putih

"for some x" disebut kuantifier (simbol : $\exists$x)

"for all x" disebut kuantifier (simbol : $\forall$x)

Kalkulus Predikat-Pendahuluan

Pada dasarnya Kalkulus Predikat merupakan perluasan dari Kalkulus Proposisi dimana Kalkulus Predikat mengatasi kelemahan pada kalkulus proposisi dengan menambahkan representasi

- Objek yang memiliki sifat tertentu
- Relasi antar objek

Kalkulus Predikat-Definisi Simbol

Kalimat dalam kalkulus predikat dibuat dari simbol-simbol berikut.

- Simbol Kebenaran : *true* dan *false*
- Simbol Konstanta : a, b, c, a_1, b_1, …
- Simbol variabel : x, y, z, x_1, x_2, …
- Simbol fungsi : f, g, h, g_1, f_1, h_1, …

  Setiap simbol fungsi mempunyai arity yang menyatakan banyaknya parameter/argumen yang harus dipenuhi.
- Simbol Predikat (menyatakan relasi): p, q, r, s, p_1, q_1, …

  Setiap simbol predikat juga memiliki arity

Kalkulus Predikat-Definisi Term

Term adalah sebuah ekspresi yang menyatakan objek.

Term dibangun berdasarkan aturan-aturan sebagai berikut.

- Semua konstanta adalah term
- Semua variabel adalah term
- Jika $t_1, t_2, \ldots, t_n$ adalah term ($n \geq 1$) dan f adalah fungsi dengan arity = n, maka fungsi $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah term
- Jika A adalah kalimat, sedang s dan t adalah term, maka kondisional if A then s else t adalah term

Kalkulus Predikat-Definisi Term

Contoh :

- f(a,x) adalah term, karena

  a adalah simbol konstanta, dan semua konstanta adalah term,

  x adalah simbol variabel, dan semua variabel adalah term,

  f adalah simbol fungsi dan semua fungsi adalah term
- g(x, f(a,x)) adalah term, karena

  a adalah simbol konstanta, dan semua konstanta adalah term,

  x adalah simbol variabel, dan semua variabel adalah term,

  f dan g adalah simbol fungsi dan semua fungsi adalah term

Kalkulus Predikat-Definisi Proposisi

Proposisi digunakan untuk merepresentasikan relasi antar objek

Proposisi dibangun berdasarkan aturan sebagai berikut :

- Simbol kebenaran adalah proposisi
- Jika t_1, t_2, …, t_n adalah term dan p adalah simbol predikat dengan n – ary maka p (t_1,t_2, …, t_n) adalah proposisi

Contoh :

p (a, x, f (a,x)) adalah proposisi, karena

a adalah simbol konstanta dan

x adalah simbol variabel, dan

f adalah simbol fungsi, dan

semua konstanta, variabel, dan fungsi adalah term dan

p adalah simbol predikat 3-ary

Kalkulus Predikat-Definisi Kalimat

Kalimat dalam kalkulus predikat dibangun dengan aturan,

- Setiap proposisi adalah kalimat,
- Jika A, B, C adalah kalimat maka
  - **Negasi** (not A) adalah kalimat
  - **Konjungsi** A dengan B: (A and B) adalah kalimat
  - **Disjungsi** A dengan B : (A or B) adalah kalimat
  - **Implikasi** (If A then B) adalah kalimat
  - **Ekivalensi** A dan B (A if and only if B) adalah kalimat
  - **Kondisional** if A then B else C adalah kalimat.
- Jika A adalah kalimat dan x adalah variabel maka,
  - (**For all x**) A adalah kalimat
  - (**For some x**) A adalah kalimat

Kalkulus Predikat-Definisi Kalimat

Contoh :

1. if (for all x) p(a, b, x) then g (y) else f(a, y) adalah term, karena
   - a dan b adalah simbol konstanta,
   - x dan y adalah simbol variabel,
   - f dan g adalah simbol fungsi, dan
   - Semua konstanta, variabel dan fungsi adalah term.
   - p adalah simbol predikat.
   - (for all x) p(a, b, x) adalah kalimat, g (y) dan f(a, y) adalah term, maka kondisional if (for all x) p(a, b, x) then g (y) else f(a, y) adalah term

Kalkulus Predikat-Definisi Kalimat

2. if (for all x) p(a, b, x) then (for some y) q(y) else not p(a,b,c) adalah kalimat
   - a dan b adalah simbol konstanta,
   - x dan y adalah simbol variabel,
   - Semua konstanta dan variabel adalah term,
   - p dan q adalah simbol predikat,
   - (for all x) p(a, b, x) dan (for some y) q(y) adalah kalimat, maka kondisional if (for all x) p(a, b, x) then (for some y) q(y) else not p(a, b, c) adalah kalimat

Kalkulus Predikat-Definisi Ekspresi

Suatu ekspresi dalam kalkulus predikat dapat berupa kalimat atau term

Contoh :

x	merupakan ekspresi
f(x,y)	merupakan ekspresi
(for some x) p(x)	merupakan ekspresi

Kalkulus Predikat-Definisi

- **Subterm** dari term t atau dari kalimat A adalah setiap term antara yang digunakan untuk membangun t atau A
- **Subkalimat** adalah setiap kalimat antara yang digunakan untuk membangun kalimat yang lebih luas
- **Subekspresi** adalah subterm atau subkalimat yang terdapat pada sebuah ekspresi

Kalkulus Predikat-Definisi

Contoh :

Sebutkan semua subterm dan subkalimat yang terdapat pada ekspresi berikut :

E : if (for all x) q (x, f(a)) then f (a) else b

Subterm : a, x, f(a), b, if (for all x) q (x, f(a)) then f (a) else b

Subkalimat : q(x, f(a), (for all x) q(x,f(a))

Semuanya merupakan SubEkspresi dari E

Kalkulus Predikat-Representasi Kalimat

Contoh representasi bahasa alami ke dalam Kalkulus Predikat

Ada apel berwarna merah

(**FOR SOME x**) (Apel(x) AND Merah(x))

Semua apel berwarna merah

(**FOR ALL x**) (IF Apel(x) THEN Merah(x))

Setiap orang mencintai **seseorang**

(**FOR ALL x**) (**FOR SOME y**) LOVES(x,y)

Ani dicintai **banyak** orang

(**FOR ALL x**) LOVES(x, Ani)

Kalkulus Predikat-Representasi Kalimat

Semua Apel berwarna merah terasa manis

(**FOR ALL x**) (IF apel(x) AND merah(x) THEN manis(x))

(**FOR ALL x**) (IF apel(x) THEN (IF merah(x) THEN manis(x)))

Tidak semua apel berwarna merah terasa manis

NOT [(**FOR ALL x**) (IF apel(x) AND merah(x) THEN manis(x))]

[NOT (**FOR ALL x**)] [NOT (IF apel(x) AND merah(x) THEN manis(x))]

(**FOR SOME x**) (apel(x) AND merah(x) AND NOT manis(x))

Latihan-Representasi Kalimat

- **Semua** Komunis itu tidak bertuhan
- Tidak **ada** gading yang tidak retak
- **Ada** gajah yang jantan dan **ada** yang betina
- **Tidak semua** pegawai negeri itu manusia korup
- **Hanya polisi**lah yang berwenang mengadakan penyidikan, kalau **ada** orang yang melanggar hukum
- **Semua** orang komunis itu bukan pancasilais.

  Ada orang komunis yang anggota tentara.

  Jadi, ada anggota tentara yang bukan pancasilais
- **Barang siapa** meminjam barang orang lain dan tidak mengembalikannya adalah penipu. **Ada** penipu yang begitu lihai, sehingga tidak ketahuan. Kalau **orang** menipu dan itu tidak ketahuan, ia tidak dapat dihukum. Jadi **ada** penipu yang tidak dapat dihukum

Kalkulus Predikat-Representasi Kalimat

Semua Komunis itu tidak bertuhan
$\forall$**x** [IF Komunis(x) THEN NOT Bertuhan(x)]

Tidak **ada** gading yang tidak retak
NOT [($\exists$**x**) (Gading(x) AND NOT Retak(x)]
$\forall$**x** (NOT (Gading(x) AND NOT Retak(x)]
$\forall$**x** (IF Gading(x) THEN Retak(x))

Ada gajah yang jantan dan **ada** yang betina :
($\exists$**x**)[(Gajah(x) AND Jantan(x)) OR (Gajah(x) AND Betina(x))]
($\exists$**x**)[(Gajah(x) AND (Jantan(x)) OR Betina(x))]

Tidak semua pegawai negeri itu manusia korup
NOT [$\forall$**x** if Manusia(x) AND Pegawai_Negeri(x) THEN Korup(x)]
($\exists$**x**) [NOT (NOT(Manusia(x) AND Pegawai_Negeri(x) AND NOT Korup(x)]
($\exists$**x**) [Pegawai_Negeri(x) AND Manusia(x) AND NOT Korup(x)]

Kalkulus Predikat - Representasi Kalimat

Hanya polisilah yang berwenang mengadakan penyidikan, kalau **ada** orang yang melanggar hukum

∃**x**∀**y** [IF Orang(x) AND MelanggarHukum(x) THEN (IF Polisi(y) Then penyidikan(y, x)]

Semua orang komunis itu bukan pancasilais.

Ada orang komunis yang anggota tentara.

Jadi, ada anggota tentara yang bukan pancasilais.

∀**x** [If Komunis(x) then Not Pancasilais(x)];

∃**x** [Komunis(x) and Tentara(x)];

∃**x**[(Tentara(x) and Not Pancasilais(x)]

Kalkulus Predikat - Representasi Kalimat

Barang siapa meminjam barang orang lain dan tidak mengembalikannya adalah penipu. **Ada** penipu yang begitu lihai, sehingga tidak ketahuan. Kalau **orang** menipu dan itu tidak ketahuan, ia tidak dapat dihukum. Jadi **ada** penipu yang tidak dapat dihukum

1. (For all x, y, z) If orang(x) and orang(z) and barang(y) and Meminjam(x,y,z) and Not Mengembalikkan(x,y,z) Then Penipu(x)
2. (For some x_1) Penipu(x_1) and lihai(x_1) and Not Ketahuan(x_1)
3. (For all x) if penipu(x) and Not ketahuan(x) then not Hukum(x)
4. (For some x_1) penipu(x_1) and Not Hukum(x_1)

Kalkulus Predikat - Representasi Kalimat

"The law says that, it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations. The country Nono, an enemy of america, has some missiles, and all of its missiles were sold to it by Colonel West who is American. "

Please Translate the text above to predicate symbols !!.

Predicates are :

… it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations

∀x,y,z [IF American(x) AND Weapon(y) AND Nation(z) AND Hostile(z) AND Sell(x,y,z) THEN Criminal(x)]

Nono, …. Has some missiles

∃y [Owns(Nono,y) AND Missile(y)]

Kalkulus Predikat - Representasi Kalimat

… all of its missiles were sold to it by Colonel West

$\forall y$ [IF Owns(Nono,y) AND Missile(y) THEN Sell(West,y,Nono)]

… West, who is American

American(West)

The country Nono, …

Nation(Nono)

… Nono, an enemy of america

Enemy(Nono,America)

Nation(America)

Kalkulus Predikat - Representasi Kalimat

From the text above, we can conclude :

All Missiles are weapons

$\forall y$ [IF Missiles(y) THEN Weapon(y)]

Enemy of America counts as "Hostile"

$\forall x$ [IF Enemy(x, America) THEN Hostile(x)]

Kalkulus Predikat - Variabel Bebas/Terikat

- Suatu variabel dikatakan terikat dalam sebuah ekspresi jika sedikitnya ada satu kemunculan x terikat pada ekspresi tersebut
- Sebaliknya dikatakan variabel bebas jika sedikitnya ada satu kemunculan bebas dalam ekspresi tersebut.

Contoh :

(FOR ALL x) [p(x,y) AND (FOR SOME y) q(y,z)]

x pada p(x, y) adalah terikat

y pada p(x, y) adalah bebas

y pada q(y, z) adalah terikat

z pada q(y, z) adalah bebas

Kalkulus Predikat - Variabel Bebas/Terikat

Kemunculan variabel terikat dipengaruhi oleh kemunculan kuantifier yang paling dekat.

<u>Contoh :</u>

(FOR ALL x) [p(x) OR (FOR SOME x) (FOR ALL y) r(x, y)]

variabel x pada p(x) dipengaruhi kuantifier FOR ALL x
variabel x pada r(x, y) dipengaruhi kuantifier FOR SOME x

Catatan,
Perbedaan antara variabel Bebas dan Variabel Terikat adalah
Variabel Bebas, Nilainya diberikan oleh interpretasi
Variabel Terikat,Nilainya terbatas dari interpretasi yang diberikan

Kalkulus Predikat - Kalimat Tertutup

Sebuah kalimat dikatakan tertutup jika tidak mempunyai kemunculan bebas dari variabel-variabelnya

Contoh :

1. (FOR ALL x) (FOR SOME y) p(x, y)adalah kalimat tertutup
2. (FOR ALL x) p(x, y) bukan merupakan kalimat tertutup

Kalkulus Predikat - Simbol Bebas

Simbol bebas dari ekspresi A adalah :

- variabel-variabel bebas
- semua konstanta
- semua simbol fungsi
- semua simbol predikat

dari ekspresi A

Kalkulus Predikat - Interpretasi

Misal D adalah sebarang himpunan tak kosong, maka sebuah interpretasi I dalam domain D akan memberi nilai pada setiap simbol konstanta, variabel bebas, fungsi dan predikat yang ada pada kalimat dengan aturan sebagai berikut :

- Untuk setiap konstanta a, yaitu elemen a_1 dari D
- Untuk setiap variabel x, yaitu elemen x_1 dari D
- Untuk setiap simbol fungsi f dengan arity = n , yaitu :

  Fungsi $f_1(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ dimana argumen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ merupakan elemen dari D, dan nilai fungsi $f_1(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ merupakan anggota D
- Untuk setiap simbol predikat p dengan arity = n, yaitu relasi $p_1(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ dimana argumen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ merupakan elemen dari D dan nilai $p_1(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ adalah TRUE atau FALSE

Jadi untuk suatu ekspresi A, sebuah interpretasi I dikatakan interpretasi untuk A, jika I memberikan nilai kepada setiap simbol bebas dari A.

Kalkulus Predikat – Arti Kalimat

- Arti kalimat ditentukan oleh interpretasi yang diberikan. Tetapi karena dalam kalkulus predikat mengandung pengertian objek, maka interpretasi dalam kalimat predikat harus juga mendefinisikan suatu **domain yaitu himpunan objek yang memberi arti pada term**.
- Suatu interpretasi harus memberi nilai pada setiap simbol bebas pada kalimat tersebut.

Kalkulus Predikat – Arti Kalimat

Misalkan ada kalimat tertutup :

A : IF (FOR ALL x) (FOR SOME y) p(x, y) THEN p(a, f(a))

Interpretasi untuk kalimat A harus

- Mendefinisikan Domain
- Memberikan nilai untuk simbol bebas dalam hal ini :
  - Konstanta a, Simbol fungsi f, Simbol p

Contoh :

1. Diberikan interpretasi I dengan Domain D adalah himpunan bilangan integer positif, dimana :

a = 0

p = relasi "lebih besar" yaitu : p(d1, d2) = (d1 > d2)

f = fungsi suksesor yaitu f(d) = d + 1

berdasarkan interpretasi I, kalimat tersebut dapat diartikan sebagai :

IF untuk setiap integer x Ada integer y sedemikian sehingga x > y THEN 0 > 0 + 1

Kalkulus Predikat – Arti Kalimat

2. Misalkan interpretasi J dengan domain bilangan integer positif, yang akan memberi nilai :

a = 0

p = relasi "ketidaksamaan" yaitu : $p(d1, d2) = (d1 \neq d2)$

f = fungsi predesesor yaitu $f(d) = d - 1$

Berdasarkan interpretasi J, kalimat tersebut dapat diartikan sebagai :

IF untuk setiap integer x Ada integer y sedemikian sehingga $x \neq y$ THEN $0 \neq 0 - 1$

Kalkulus Predikat – Arti Kalimat

Contoh Soal :
Diberikan Ekspresi :
E = IF p(x, f(x)) THEN (FOR SOME y) p(a, y)

1. Misalkan I adalah interpretasi untuk E dengan Domain bilangan real; dimana
   a = $\sqrt{2}$
   x = Π
   f = fungsi "dibagi 2" yaitu : f1(d1) = d1/2
   p = relasi "lebih besar atau sama dengan" yaitu p(d1, d2) = (d1 ≥ d2)

2. Misalkan J adalah interpretasi untuk E dengan Domain semua orang; dimana
   a = Soeharto
   x = Soekarno
   f = fungsi "Ibu dari" yaitu : f1(d1) = ibu dari d1
   p = relasi "anak dari" yaitu p(d1, d2) = d1 adalah anak dari d2
   Apakah arti ekspresi E berdasarkan interpretasi I dan interpretasi J ?

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik

Misal A adalah suatu ekspresi dan I adalah interpretasi untuk A yang meliputi domain tak kosong D. Maka nilai dibawah I ditentukan berdasarkan aturan semantik sebagai berikut :

a. Nilai suatu konstanta a adalah elemen domain D
b. Nilai variabel x adalah elemen domain D
c. Nilai aplikasi $f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ adalah elemen domain D dimana $f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ f adalah fungsi yang diberikan kepada f dan $t_1, t_2, \ldots, t_n$ adalah nilai term berdasarkan interpretasi I
d. Nilai Term kondisional *if A then s else t* adalah nilai term s jika A bernilai TRUE dan sama dengan nilai term t jika A bernilai FALSE
e. Nilai proposisi p1(t1, t2, …, tn) adalah nilai kebenaran TRUE atau FALSE dimana p adalah relasi yang diberikan oleh interpretasi I dan nilai dari t1, t2, …, tn berdasarkan I.
f. Aturan untuk penghubung logik (not, or, dsb) sama dengan aturan pada kalkulus proposisi

Kalkulus Predikat – Interpretasi yang diperluas

Misal I adalah suatu interpretasi yang mencakup domain D maka untuk sembarang variabel x dan elemen d pada domain D, interpretasi yang diperluas

$$< x \leftarrow d > \circ I$$

adalah interpretasi yang mencakup domain D dimana :

Variabel x diberikan nilai elemen pada domain D

1. Setiap variabel y (selain x) diberi nilai sama dengan elemen domain y_1 yaitu nilai berdasar interpretasi D. Jika y tidak memiliki nilai berdasar I maka y juga tidak memiliki nilai berdasar $< x \leftarrow d > \circ I$
2. Setiap konstanta a, simbol fungsi f, dan simbol predikat p diberi nilai sesuai dengan nilai aslinya yaitu a_I, f_I, p_I

Sifat interpretasi yang diperluas

Jika I adalah interpretasi untuk kalimat berbentuk

(FOR ALL x) A dan (FOR SOME x) A,

maka $< x \leftarrow d > \circ I$ adalah interpretasi yang berlaku untuk A juga

Kalkulus Predikat – Interpretasi yang diperluas

Contoh :

1. I adalah interpretasi yang meliputi bilangan integer, dengan
   x = 1
   y = 2
   Maka perluasan interpretasi terhadap I :
   $< x \leftarrow 3 > \circ I$
   akan memberikan nilai :
   x = 3
   y = 2

2. I adalah interpretasi yang meliputi bilangan integer, dengan
   f adalah simbol fungsi biner,
   \+ adalah fungsi penambahan integer
   maka :
   $< f \leftarrow + > \circ I$ adalah interpretasi yang meliputi domain bilangan integer dengan f fungsi penambahan +.

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

Aturan FOR ALL

- Kalimat (FOR ALL x) A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi I jika :
  Untuk setiap elemen d dari domain D menyebabkan subkalimat A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I
- Kalimat (FOR ALL x) A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi I jika :
  Ada elemen d dari domain D sedemikian sehingga subkalimat A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I

Aturan FOR SOME

- Kalimat (FOR SOME x) A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi I jika :
  Untuk setiap elemen d dari domain D menyebabkan subkalimat A bernilai FALSE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I
- Kalimat (FOR SOME x) A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi I jika :
  Ada elemen d dari domain D sedemikian sehingga subkalimat A bernilai TRUE berdasarkan interpretasi yang diperluas < x ← d> o I

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

Contoh

1. A : (FOR SOME x) p(x,y)
   Diberikan interpretasi I yang meliputi himpunan bilangan integer positif
   y = 2
   p : relasi "kurang dari", yaitu $p_I(d_1, d_2) = d_1 < d_2$

Berdasarkan aturan (FOR SOME x) maka
(FOR SOME x) p(x, y) bernilai TRUE jika ada elemen dari D sehingga nilai p(x, y) bernilai TRUE berdasarkan interpretasi $< x \leftarrow d > o\ I$

Misal diambil d = 1 maka perluasan interpretasi menjadi $< x \leftarrow 1 > o\ I$ sehingga berdasarkan aturan proposisi diperoleh bahwa
p(1, 2) yaitu 1 < 2 adalah TRUE

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

2. B : IF (FOR ALL x) (FOR SOME y) p(x, y) THEN p(a, f(a))

   Misal I adalah interpretasi untuk B yang meliputi domain bilangan real positif dimana:

   a = 1

   f : fungsi "akar dari" yaitu f1(d) = √d

   p : relasi "tidak sama dengan", yaitu p1(d_1, d_2) = $d_1 \neq d_2$

Misal diasumsikan bahwa B bernilai FALSE

   Maka harus diperhatikan bahwa :

   Antisenden : (FOR ALL x) (FOR SOME y) p(x, y) bernilai TRUE

   Konsekuen : p(a, f(a)) bernilai FALSE

Kalkulus Predikat – Aturan Semantik Untuk Kuantifier

Untuk lebih mudahnya, dimulai dari Konsekuen karena bentuknya lebih sederhana. Berdasarkan aturan proposisi, maka nilai konsekuen p(a, f(a)) yaitu $1 \neq \sqrt{1}$ adalah FALSE berdasarkan I

Antisenden : berdasarkan Aturan (FOR ALL x)

Untuk setiap elemen d_1 dari D, subkalimat (for some y) p(x,y) bernilai TRUE berdasarkan $< x \leftarrow d > \circ I$

Berdasarkan Aturan (FOR SOME y)

Untuk setiap elemen d_1 dari D, ada elemen d_2 sedemikian sehingga p(x,y) bernilai TRUE berdasarkan $< y \leftarrow d_2 > \circ < x \leftarrow d_1 > \circ I$

Misal ambil sembarang elemen domain dan $d_2 = d_1 + 1$

Maka berdasarkan aturan proposisi, nilai p(x,y) yaitu $p(d_1, d_2)$

Berarti $p(d_1, d_1+1)$ menyatakan bahwa $d_1 \neq d_1 + 1$ adalah TRUE

berdasarkan $< y \leftarrow d_2 > \circ < x \leftarrow d_1 > \circ I$

Jadi dapat disimpulkan bahwa kalimat B bernilai FALSE berdasarkan I

Kalkulus Predikat – Kecocokan

- Dua interpretasi dikatakan cocok jika keduanya memberi nilai yang sama untuk simbol-simbolnya <u>atau</u> keduanya tidak memberi nilai untuk simbol-simbolnya
- Dua interpretasi I dan J cocok untuk ekspresi A jika nilai A berdasarkan I sama dengan nilai A berdasarkan J <u>atau</u> I dan J bukan interpretasi untuk A

Kalkulus Predikat – Kecocokan

Contoh :

Misalkan I adalah interpretasi yang meliputi bilangan integer dengan :

a → 0

b → 2

x → -1

f → fungsi suksessor $f_1(d) = d + 1$

dan interpretasi J yang meliputi integer dengan :

a → 0

x → 1

f → fungsi predesesor $f_1(d) = d – 1$

- I dan J cocok untuk konstanta a
- I dan J cocok untuk simbol predikat p
- I dan J tidak cocok untuk variabel x
- I dan J cocok untuk ekspresi f(x)
- I dan J cocok untuk ekspresi f(y)
- I dan J tidak cocok untuk ekspresi f(b), karena I adalah interpretasi untuk f(b) tetapi tidak untuk J

Kalkulus Predikat – Validitas

Validitas di dalam kalkulus predikat didefinisikan hanya untuk kalimat tertutup, yaitu kalimat yang tidak memiliki variabel bebas.

Definisi

Sebuah kalimat A dikatakan valid jika kalimat tersebut bernilai TRUE berdasarkan setiap interpretasi untuk A

Pembuktian validitas kalimat dapat menggunakan :

- Dengan membuktikan bahwa kalimat tertutup A adalah VALID

  (biasanya lebih "enak" untuk kalimat-kalimat yang memiliki penghubung logik : IFF, AND, NOT)
- Dengan membuktikan bahwa kalimat tertutup A adalah TIDAK VALID dengan cara mencari satu interpretasi tertentu yang menyebabkan kalimat tersebut bernilai FALSE.

  (biasanya untuk kalimat-kalimat yang memiliki penghubung logik : IF-THEN, OR)

Kalkulus Predikat – Validitas

Contoh

- Cara 1

  Misalkan ingin dibuktikan validitas kalimat A berikut :

  A : [NOT (FOR ALL x) p(x)] IFF [(FOR SOME x) NOT p(x)]

  Berdasarkan aturan IFF, cukup diperlihatkan bahwa :

  NOT (FOR ALL x) p(x)] dan [(FOR SOME x) NOT p(x)] memiliki nilai kebenaran yang sama berdasarkan setiap interpretasi,

  atau dengan kata lain subkalimat pertama bernilai TRUE tepat bila subkalimat kedua juga bernilai TRUE

Kalkulus Predikat – Validitas

A : [NOT (FOR ALL x) p(x)] IFF [(FOR SOME x) NOT p(x)]

Misalkan terdapat sebarang interpretasi I untuk A, maka
NOT (FOR ALL x) p(x) bernilai TRUE berdasarkan I
Tepat bila (berdasarkan aturan NOT)
    (FOR ALL x) p(x) bernilai FALSE berdasarkan I
Tepat bila berdasarkan (FOR ALL x)
    Ada elemen d di dalam domain D
Sehingga p(x) bernilai FALSE berdasarkan $< x \leftarrow d > \circ I$
Tepat bila berdasarkan aturan NOT
    Ada elemen d di dalam domain D
sehingga NOT p(x) bernilai TRUE berdasarkan $< x \leftarrow d > \circ I$
Tepat bila berdasarkan aturan (FOR SOME x)
    (FOR SOME x) NOT p(x) bernilai TRUE berdasarkan Interpretasi I

Kalkulus Predikat – Validitas

Cara 2

Misalkan ingin dibuktikan validitas kalimat B berikut : (cara 2)

B : IF (FOR SOME y) (FOR ALL x) q(x, y) THEN
(FOR ALL x) (FOR SOME y) q(x, y)

Asumsikan bahwa B tidak valid, sehingga bahwa untuk suatu interpretasi I untuk B

Jika Antisenden : (FOR SOME y) (FOR ALL x) q(x, y) bernilai TRUE berdasarkan I

maka konsekuen : (FOR ALL x) (FOR SOME y) q(x, y) bernilai FALSE berdasarkan I

Kalkulus Predikat – Validitas

Karena Antisenden bernilai TRUE berdasarkan I,

maka (berdasarkan aturan FOR SOME y)

Ada elemen d_1 di dalam domain D sehingga (FOR ALL x) q(x, y) bernilai TRUE berdasarkan $< y \leftarrow d_1 > o\ I$

Tepat bila berdasarkan aturan FOR ALL x

Ada elemen d_1 di dalam domain D sedemikian sehingga untuk setiap elemen d_2 di dalam domain D sedemikian sehingga q(x, y) bernilai TRUE

berdasarkan $< x \leftarrow d_2 > o < y \leftarrow d_1 > o\ I$ ……………………….. (1)

Karena konsekuen bernilai FALSE berdasarkan I,

Maka (berdasarkan aturan FOR ALL x)

Ada elemen e_1 di dalam domain D sehingga (FOR SOME y) q(x, y) bernilai FALSE berdasarkan $< x \leftarrow e > o\ I$

Tepat bila (berdasarkan aturan FOR SOME y)

Ada elemen e_1 di dalam domain D sedemikian sehingga untuk semua elemen e_2 di dalam domain D sedemikian sehingga q(x, y) bernilai FALSE

berdasarkan $<y \leftarrow e_2 > o < x \leftarrow e_1 > o\ I$ ……………………………(2)

Kalkulus Predikat – Validitas

Berdasarkan (1) dan (2) kita dapat mengambil nilai elemen d_1 sama dengan e_2 dan d_2 sama dengan e_1, sehingga dari (1) diperoleh :

q(x, y) bernilai TRUE berdasarkan $< x \leftarrow e_1 > o < y \leftarrow d_1 > o\ I$ …….. (3)

dan dari (2) diperoleh

q(x, y) bernilai FALSE berdasarkan $<y \leftarrow d_1 > o < x \leftarrow e_1 > o\ I$ ……..(4)

Karena variabel x dan y berbeda, maka interpretasi

$< x \leftarrow e_1 > o < y \leftarrow d_1 > o\ I$ dan $< y \leftarrow d_1 > o < x \leftarrow e_1 > o\ I$

adalah identik, sehingga terlihat bahwa (3) dan (4) saling berkontradiksi.

Berarti asumsi bahwa B tidak valid adalah tidak benar, sehingga B <u>VALID</u>